UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

A Álgebra Geométrica de Euclides

RENATA LEANDRO BECKER

Florianópolis - 2004

Esta monografia foi julgada adequada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no curso de Matemática - Habilitação Licenciatura e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº. 064 / SGC / 2004.

Profª. Carmem Suzane Comitre Gimenez
Professora responsável pela disciplina

Banca examinadora:

Eliezer Batista
Orientador

José Luiz Rosas Pinho

Antônio Vladimir Martins

SUMÁRIO

Introdução

A motivação para este trabalho, surgiu do meu interesse particular por geometria. De todas as disciplinas que cursei no curso de matemática, estas foram as que mais gostei, desde a geometria quantitativa, a geometria euclidiana, até a geometria diferencial, sempre procurei aprofundar meus conhecimentos nessa área. Pela minha aptidão de pensar na resolução de problemas, inicialmente de maneira geométrica, surgiu o interesse de estudar na matemática esta linha de pensamento.

Este trabalho, apresenta um estudo sobre a evolução da linguagem algébrica aplicada a problemas geométricos, além de estudar o problemas inverso, o da linguagem geométrica sendo aplicada a problemas algébricos.

No Capítulo 1, começamos o estudo sobre as origens da Álgebra geométrica grega, que surge um função dos problemas encontrados pelos gregos em trabalhar com a álgebra herdada pelo babilônios.

No capítulo 2, estudamos grande parte do Livro II de *Os Elementos* de Euclides, em que ele descreve a Álgebra geométrica grega, na forma de raciocínio lógico dedutivo. Nesse estudo, utilizamos conceitos de geometria moderna para explicar o trabalho de Euclides na representação de identidades algébricas em linguagem geométrica, assim como na resolução geométrica de equações quadráticas. Ao mesmo tempo, que analisamos a visão grega dos conceitos algébricos, sobre os números, as identidades algébricas e as equações quadráticas.

No capítulo 3, acompanhamos a evolução da Álgebra Geométrica no período árabe, período este em que se desenvolveu também a álgebra de al-Khowarizmi, que deu origem a álgebra como conhecemos hoje. Nos estudos sobre a obra de al-Khowarizmi, nos concentramos nos elementos geométricos de sua álgebra, estudando as suas justificativas geométricas para as soluções algébricas de equações quadráticas, que desempenharam um papel fundamental na evolução do conceito abstrato da álgebra. Na segunda parte deste capítulo, veremos o estudo que Omar Khayyam desenvolveu para encontrar a raiz positiva de uma cúbica, além de observar as mudanças que haviam ocorrido sob a visão árabe, dos conceitos algébricos e geométricos.

No capítulo 4, estudamos a vida e obra de René Descartes, que desenvolve em seu trabalho *La Géométrie*, entre muitos outros assuntos, o estudo das representações geométricas das operações aritméticas, das identidades algébricas e também das resoluções de equações quadráticas. Além disso, veremos que foi neste trabalho, que Descartes desenvolveu o estudo que deu origem a geometria analítica. Mas, o fato mais importante do capítulo, foi o método que Descartes desenvolveu para resolver determinados problemas geométricos. Este método, consistia em aplicar álgebra aos problemas geométricos, afim de simplificar a sua resolução.

Capítulo 1

As Origens da Álgebra Geométrica

Na época de Platão, a matemática grega sofreu drásticas modificações. Platão (427 a.C. a 347 a.C.) foi um dos grandes pensadores que motivaram o estudo da matemática grega em sua época. Ele fundou sua Academia em Atenas por volta de 387 a.C, uma instituição orientada por propósitos sistemáticas de investigação científica e filosófica, e a dirigiu por toda a sua vida. Mesmo após a morte de Platão, quase todos os trabalhos matemáticos importantes do século IV a.C., foram feitos por seus amigos ou discípulos, fazendo da Academia a ligação da matemática dos pitagóricos com a posterior e duradoura Escola de Alexandria.

Dos estudos e trabalhos matemáticos da época de Platão, a dicotomia entre número e grandezas contínuas forneceu a principal motivação de criar um novo método para tratar da álgebra herdada pelos babilônios. Os velhos problemas em que, dada a soma e o produto de dois lados de um retângulo se pediam as dimensões, tinham de ser tratados de modo diferente dos algoritmos numéricos dos babilônios. Decorrente dessa necessidade, foi criada uma nova "Álgebra Geométrica", que tomou o lugar da antiga "Álgebra aritmética", e nessa nova álgebra não podia haver somas de segmentos com áreas ou de áreas com volumes. Mas para esclarecer essa motivação, devemos conhecer os fundamentos da álgebra babilônia e verificar os motivos que levaram os gregos a procurar uma nova abordagem para a álgebra da época.

Os matemáticos babilônios faziam o uso de tabelas numéricas na realização de cálculos. Essas tabelas continham números e seqüências de números, várias delas quando descobertas foram tomadas por um registro de negócios da época babilônia. No entanto, em algumas tabelas após ser feita uma análise, podia-se verificar que nelas havia um profundo significado matemático, como na tabela *Plimpton 322*, que continha uma seqüência de ternas pitagóricas.

Na época em que o alfabeto ainda não havia sido inventado, os babilônios utilizavam uma outra maneira para representar quantidades desconhecidas; eles usavam palavras como *comprimento*, *largura*, *área* e *volume*. Mas embora empregassem o uso de palavras num sentido abstrato, eles não hesitavam em somar um comprimento com uma área, ou uma área com um volume. Além disso, em muitos problemas babilônios havia a falta de enunciados explícitos, de algoritmos e regras. Em vários algoritmos, os babilônios faziam o uso de aproximações em cálculos e a falta de distinção entre resultados exatos e aproximados constituía-se em um problema grave nas bases da álgebra babilônia.

O problemas encontrados pelos gregos em lidar com a álgebra babilônia os levaram a criar a "Álgebra Geométrica", onde não podiam haver somas de áreas com volumes, devia haver uma forma homogênea de escrita dos termos da equação e principalmente que todas essas equações deviam ser interpretadas geométricamente. E para encontrar as soluções de alguns problemas algébricos, faziam o uso do processo conhecido como "a aplicação de áreas", uma parte da álgebra geométrica completamente estudada em *Os Elementos*, de Euclides.

Outro grande fator que levou os gregos a utilizarem a aplicação de áreas para resolver problemas algébricos, foi a dificuldade que encontraram em representar grandezas incomensuráveis, dessa forma evitavam as razões que só seriam abordadas muito tempo depois por Euclides, também em *Os Elementos*.

Capítulo 2

Euclides de Alexandria e o Livro II de Os Elementos

Neste capítulo, apresentaremos as proposições do Livro II de *Os Elementos*, que constituem a Álgebra Geométrica de Euclides. Faremos uma análise moderna das proposições deste livro, mostrando a sua significação geométrica, já que se trata de uma tradução grega das operações algébricas herdadas pelos babilônios. A seguir, veremos o contexto histórico em que Euclides escreveu sua obra mais famosa. Obra essa, que constitui o foco principal deste trabalho, pois como veremos mais adiante, o trabalho de Euclides foi posteriormente estudado pelos árabes, para depois ser difundido na Europa, sendo amplamente estudado e considerado uma das maiores obras já publicadas.

A morte de Alexandre, o Grande em 323 a.C., levou as disputas entre os generais do exercito grego. Seu império se dividiu entre alguns de seus líderes militares, resultando na emergência de três impérios, com governantes independentes, mas unidos pelos laços da civilização helênica decorrente das conquistas de Alexandre. O controle da parte egípcia do império estava firmemente nas mãos de Ptolomeu I, que somente em 306 a.C. começou a governar efetivamente. Escolheu Alexandria como sua capital e, para atrair homens de saber à sua cidade, imediatamente começou a construir a famosa Escola de Alexandria, que possuía uma das melhores bibliotecas de seu tempo. Para compor uma equipe de intelectuais para a escola, Ptolomeu recorreu a Atenas, como professores ele chamou um grupo de sábios de primeira linha para desenvolver os vários campos de estudo. Euclides, possivelmente de Atenas foi escolhido para chefiar o departamento de matemática.

Pouco se sabe sobre a vida de Euclides, tanto que nenhum lugar de nascimento é associado ao seu nome. Sabe-se apenas que era conhecido por Euclides de Alexandria, porque foi chamado para lá ensinar matemática. Da natureza de seu trabalho pode-se presumir que estudou com os discípulos de Platão, se não na própria academia. Pelos relatos que existem atualmente sobre Euclides, ele era conhecido pela sua capacidade de ensinar e por sua habilidade ao expor os conceitos matemáticos.

Euclides foi o autor do texto de matemática mais bem-sucedido de todos os tempos. Embora ele fosse autor de pelo menos outros doze trabalhos, cobrindo tópicos variados, desde óptica, astronomia, música e mecânica até um livro sobre secções cônicas, sua fama repousa principalmente sobre sua obra, *Os Elementos*. O sucesso da obra de Euclides, é resultante da sua forma axiomática e lógica de expor a matemática, sua obra era um livro-texto, de modo nenhum o primeiro, mas com certeza foi o mais importante já publicado.

Euclides reuniu em *Os Elementos*, uma coleção de treze livros, contendo todos os conhecimentos gregos da matemática elementar, como a aritmética (no sentido de teoria dos números), geometria sintética (de pontos, retas, círculos e esferas), e álgebra (não no sentido simbólico moderno, mas na forma de representação geométrica).

O Livro II de *Os Elementos* é pequeno e apresenta 14 proposições que na época de Euclides tiveram grande significado. Elas lidavam com transformações de áreas e com a álgebra geométrica da escola Pitagórica. Ao passo que em nosso tempo as grandezas são representadas por letras que se entende representarem números, conhecidos ou não, sobre os quais operamos com as regras algorítmicas da álgebra, nos dias de Euclides as grandezas eram representadas como segmentos de reta, satisfazendo aos axiomas e teoremas da geometria. Algumas vezes é dito que os gregos não possuíam uma álgebra, mas isso é evidentemente falso. Tinham o Livro II de *Os Elementos*, que é uma álgebra geométrica servindo aos mesmos fins que nossa álgebra simbólica. A seguir, apresentamos 11 proposições do Livro II de Euclides, que constituem sua Álgebra Geométrica. Analisaremos a interpretação geométrica das identidades algébricas, e mostraremos como os gregos resolviam geométricamente alguns problemas envolvendo equações quadráticas.

2.1 Identidades Algébricas

No Livro II de *Os Elementos*, Euclides apresenta dez proposições que tratam das identidades algébricas, mas que aqui são apresentadas através de uma representação geométrica. Não há duvida que a álgebra moderna facilita consideravelmente a manipulação de relações entre grandezas. Mas também é verdade que um geômetra grego conhecendo as proposições da "álgebra"de Euclides era muito mais capaz de aplicar estas proposições a questões práticas de mensuração do que um geômetra experiente de hoje. A álgebra geométrica antiga não era fácil de ser compreendida, e muitas vezes seus métodos podem parecer complexos e exaustivos, mas apesar dela não ter sido o instrumento ideal, com certeza era a mais eficaz.

2.1.1 Definições

Antes de iniciar a exposição das proposições temos que dar alguns esclarecimentos sobre as concepções que Euclides atribuía a alguns elementos geométricos.

Nos livros *Os Elementos* de Euclides ele usava a palavra *reta* ou *linha reta* para definir o que chamamos atualmente de"segmento". Para ele uma *reta* podia ser estendida o quanto quiséssemos, mas não existia ainda a noção de infinito e continuidade. Além disso, não se mediam segmentos nos Elementos de Euclides, pois há segmentos incomensuráveis com qualquer unidade que se adote. Este fator, pode ter sido o motivo principal pelo qual o gregos optaram por apresentar seus resultados de maneira geométrica, sendo que não havia para eles números irracionais para representar seus comprimentos. A comparação entre dois segmentos se fazia mediante o conceito de razão entre eles, mas razões entre grandezas não eram consideradas números, e esta é uma das características importantes a serem observadas aqui. Os gregos, utilizavam uma visão diferente da atual. Para eles o próprio segmento era tomado como a solução de um problema, ou até mesmo significava um número.

Da mesma forma, não havia medida de áreas na matemática grega. Na realidade, Euclides em *Os Elementos* não menciona em nenhum momento uma definição de área, ele diz apenas que duas figuras são chamadas "iguais"quando têm a mesma magnitude, isto é, o mesmo comprimento se são segmentos ou compreendem a mesma região se são figuras planas. Em sua obra, a noção de área era muito mais qualitativa que quantitativa, no sentido que se referia à região delimitada por uma figura do que propriamente um valor numérico atribuído à região.

Neste trabalho, usaremos a definição moderna de área, em que uma área é basicamente um número real positivo atribuído a uma região delimitada por uma curva fechada e simples[1]. Esta quantidade deverá apresentar as seguintes propriedades:

1. Duas figuras congruentes tem a mesma área.

2. Se duas figuras se interceptam no máximo por pontos de fronteira[2], então a área da união destas figuras é igual à soma numérica das áreas das figuras componentes.

3. A área de um quadrado de lado 1 é definida como sendo 1.

Portanto, medir uma área é comparar a região com um quadrado padrão. Utilizaremos como notação, para a área de uma determinada figura, a letra **A** seguida da determinação da figura, ou seja, a área de um quadrado $ABCD$, por exemplo, será $\mathbf{A}(ABCD)$, ou a área de um retângulo $EFGH$, será $\mathbf{A}(EFGH)$, bem como a área de qualquer outra figura plana.

Daremos continuidade ao trabalho apresentando as proposições do Livro II de Euclides, que representam diversas identidades algébricas, de maneira geométrica. Faremos comentários sobre as identidades, explicando a representação geométrica dada em cada uma delas. Em especial faremos a demonstração Euclidiana, ou seja, como o próprio Euclides fez em *Os Elementos*, da Proposição 4 do Livro II, devido ao fato de que esta é a conhecida identidade $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, e que a sua representação geométrica constitui uma maneira significativa de entender a forma algébrica da mesma.

2.1.2 Proposições

Veremos a seguir, dez proposições do Livro II de *Os Elementos*, sendo apresentadas com seus enunciados e figuras originais. Salientamos, que os enunciados apresentam um determinado nível de dificuldade de compreensão para os leitores que não estão acostumados

[1]Uma curva é dita se simples se não possuir pontos de auto intersecção.

[2]Pontos que não estão no interior de uma região, ou seja, pontos em que uma bola centrada nele não possui apenas pontos interiores à região.

com a linguagem euclidiana, por isso, tentaremos elucidar o que cada enunciado significa, além de traduzi-los para linguagem moderna. Faremos comentários sobre as identidades algébricas, que correspondem a cada uma das representações geométricas apresentadas nas proposições, sendo que na Proposição 4, demonstraremos de maneira euclidiana a proposição, devido a importância da mesma, como já foi mencionado anteriormente.

Proposição 2.1 *(Prop. 1 - Livro II) Dadas duas retas, uma das quais é dividida num número qualquer de partes, o retângulo contido pelas duas retas é igual à soma dos retângulos contidos pela reta não dividida e cada uma das partes da outra.*

Para que possamos compreender claramente o enunciado da proposição, daremos um exemplo. Inicialmente são dados dois segmentos AB e AC, onde podemos dividir o segmento AC. Neste exemplo, dividiremos a segmento AC em três partes não necessariamente iguais, e depois construímos o retângulo $ACHB$, como pode ser visto a seguir (Fig. 01).

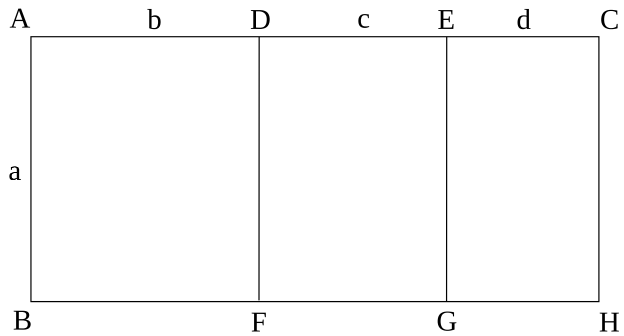

Fig. 01 - Representação geométrica da Proposição 1 - Livro II

Então, o resultado da proposição nos diz que:

$$\mathbf{A}(ACHB) = \mathbf{A}(ADFB) + \mathbf{A}(DEGF) + \mathbf{A}(ECHG)$$

Analisando sob o ponto de vista da geometria moderna, podemos escrever cada área descrita anteriormente, como a área correspondente a cada retângulo em função de seus lados, sendo assim:

$$(AB \times AC) = (AB \times AD) + (AB \times DE) + (AB \times CE)$$

Agora podemos escrever cada segmento na forma, $AB = a$, $AC = b + c + d$, $AD = b$, $DE = c$ e $CE = d$, como pode ser observado na figura anterior. Portanto, o resultado da proposição pode ser escrito da seguinte maneira, $a(b + c + d) = ab + ac + ad$.

Ou seja, esta proposição é o equivalente geométrico da conhecida lei distributiva,

$$a(b + c + d + \cdots) = ab + ac + ad + \cdots .$$

Podemos observar, que esta representação corresponde bem ao pensamento grego, de que não ter medidas para os segmentos, eles conseguiram representar de maneira totalmente geométrica a propriedade da distributividade. Estudando estas proposições, primeiramente do ponto de vista de um grego e depois aplicando definições mais modernas, podemos construir uma justificativa consistente para diversas identidades algébricas.

Proposição 2.2 *(Prop. 2 - Livro II) Se uma reta é dividida em duas partes quaisquer, o retângulo contido sobre todo e ambas partes da reta é igual ao quadrado contido sobre a reta toda.*

A proposição nos diz que dado um segmento AB, podemos dividi-lo em duas partes quaisquer AC e BC. Construímos dois retângulos com cada uma das partes de AB, sendo que o outro lado dos retângulos é um segmento AD com mesma medida que AB, como pode ser observado na figura a seguir (Fig. 02).

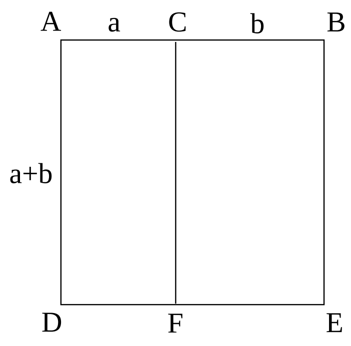

Fig. 02 - Representação geométrica da Proposição 2 - Livro II

Então, o resultado da proposição nos diz que:

$$\mathbf{A}(ACFD) + \mathbf{A}(CBEF) = \mathbf{A}(ABED)$$

Analisando sob o ponto de vista da geometria moderna, podemos escrever cada área descrita anteriormente, como a área correspondente a cada retângulo em função de seus lados, e de mesma maneira para a área do quadrado, sendo assim:

$$(AC \times AD) + (BC \times AD) = (AB \times AD)$$

Observando a figura, podemos escrever os segmentos na forma, $AC = a$, $BC = b$ e $AB = AD = a + b$. Portanto, o resultado da proposição pode ser escrito da seguinte maneira, $a(a + b) + b(a + b) = (a + b)(a + b)$. Ou seja, esta proposição é o equivalente geométrico identidade algébrica, $a(a + b) + b(a + b) = (a + b)^2$.

Proposição 2.3 *(Prop. 3 - Livro II) Se uma reta é dividida em duas partes quaisquer, o retângulo contido sobre toda uma reta é igual ao retângulo contido por uma reta e o quadrado sobre a outra reta.*

A proposição nos diz que dado um segmento AB, podemos dividi-lo em duas partes quaisquer AC e BC, construímos um retângulo cujos lados são os segmentos AB a AE, sendo que AE tem a mesma medida de BC, como pode ser observado na figura a seguir (Fig. 03).

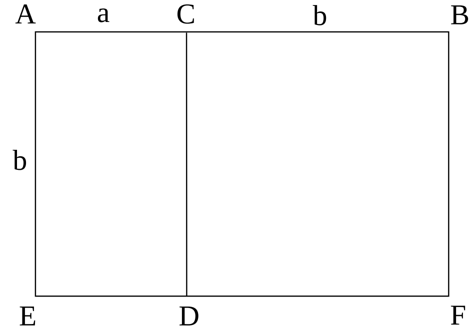

Fig. 03 - Representação geométrica da Proposição 3 - Livro II

Então, o resultado da proposição nos diz que:

$$\mathbf{A}(ABFE) = \mathbf{A}(ACDE) + \mathbf{A}(CBFD)$$

Analisando sob o ponto de vista da geometria moderna, podemos escrever cada área descrita anteriormente, como a área correspondente a cada retângulo em função de seus lados, e de mesma maneira para a área do quadrado, sendo assim:

$$AB \times AE = (AC \times AE) + (BC \times AE)$$

Observando a figura, podemos escrever os segmentos na forma, $AB = a + b$, $AC = a$ e $AE = BC = b$. Portanto, o resultado da proposição pode ser escrito da seguinte maneira, $(a + b)b = ab + b^2$. Ou seja, esta proposição é o equivalente geométrico da identidade algébrica citada anteriormente.

Proposição 2.4 *(Prop. 4 - Livro II) Se uma reta é dividida em duas partes quaisquer, o quadrado sobre a reta toda é igual aos quadrados sobre as duas partes, junto com duas vezes o retângulo que as partes contém.*

Inicialmente demonstraremos esta proposição, da mesma forma que Euclides demonstrou em *Os Elementos*. Lembremos que, Euclides justificava o argumento em suas demonstrações, utilizando os Axiomas e as Proposições que já haviam sido vistos anteriormente em sua obra, que serão comentados em algumas notas.

Demonstração:

Seja a reta AB dividida em duas partes quaisquer em C; A proposição diz que o quadrado sobre AB é igual aos quadrados sobre AC e CB, e duas vezes o retângulo contido por AC e CB (Fig. 04).

Seja o quadrado $ADEB$ sobre o lado AB[3], ligue os pontos BD; Por C trace CF

[3]Proposição 46 - Livro I: Que permite construir um quadrado sobre um segmento.

paralelo a AD ou EB, (e seja G o cruzamento de BD com CF) por G seja HK paralelo a AB ou DE[4].

Como CF é paralelo a AD, e BD cruza ambas, o ângulo exterior $C\hat{G}B$ é igual ao ângulo exterior e oposto $A\hat{D}B$[5].

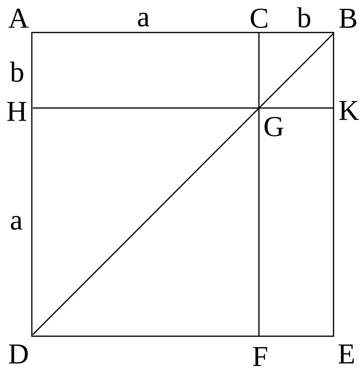

Fig. 04 - Representação geométrica da Proposição 4 - Livro II

Mas o ângulo $A\hat{D}B$ é igual ao ângulo $A\hat{B}D$, uma vez que o lado BA é igual ao lado AD[6]; Portanto, o ângulo CGB é igual ao ângulo GBC e assim o lado BC é igual ao lado CG[7].

Mas CB é igual a GK, e CG é igual a KB, portanto GK é igual a KB[8]. Portanto, $CGKB$ é um quadrilátero equilátero.

Esse quadrilátero também é retângulo, pois CG é paralelo a BK e os ângulos $K\hat{B}C$ e $G\hat{C}B$ são iguais a dois ângulos retos[3].

Mas o ângulo $K\hat{B}C$ é reto; Portanto o ângulo $B\hat{C}G$ também é reto e portanto os ângulos opostos $C\hat{G}K$ e $G\hat{K}B$ também são retos[6].

Portanto, $CGKB$ é retângulo e como foi provado que ele é equilátero, então ele é quadrado e é descrito sobre o lado CB.

[4]Proposição 31 - Livro I: Que permite traçar por um ponto, uma reta paralela a uma reta dada.

[5]Proposição 29 - Livro I: Que afirma que uma reta cruzando retas paralelas determina ângulos alternos internos iguais, o ângulo exterior igual ao ângulo interior e oposto, e os dois ângulos interiores e do mesmo lado iguais a dois ângulos retos

[6]Proposição 5 - Livro I: Que afirma que em um triângulo isosceles os ângulos da base são iguais.

[7]Proposição 6 - Livro I: Que afirma que se os dois ângulos da base de um triângulo são iguais, então o triângulo é isosceles.

[8]Proposição 34 - Livro I: Que afirma que em paralelogramos, os lados apostos e ângulos opostos são iguais e o diâmetro (diagonal) divide a área ao meio.

De maneira similar, HF[9] também é um quadrilátero e é descrito sobre o lado HG, que é igual a AC[6].

Portanto, os quadrados HF e KC são quadrados sobre AC e CB.

Como AG é igual a GE[10], e AG é o retângulo contido por AC e CB. Portanto, AG e GE resultam em duas vezes do retângulo contido por AC e CB.

Mas, HF, CK, AG e GE é todo o quadrado $ADEB$, que é o quadrado sobre AB.

Então o quadrado sobre AB é igual aos quadrados sobre AC, CB e duas vezes o retângulo contido por AC e CB.

■

Como podemos observar, as demonstrações euclidianas podem ser extensas, mas apesar disso, a forma de raciocínio lógico e dedutivo, torna o entendimento da proposição o mais claro possível. Observando agora a Fig. 04, tomamos os segmentos AB, AC e CB correspondentes aa medidas $(a+b)$, a e b respectivamente. Desta forma, podemos concluir que esta proposição é a representação geométrica da conhecida identidade algébrica, $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.

Proposição 2.5 *(Prop. 5 - Livro II) Se uma reta é cortada em partes iguais e desiguais, o retângulo contido pelas partes desiguais do todo, junto com o quadrado contido pela reta entre os pontos da seção, é igual ao quadrado contido pela metade.*

Simplificando o enunciado da proposição, temos que dado um segmento de reta AB, primeiro o dividimos em duas partes iguais em D e depois o dividimos em duas partes desiguais em C (Fig. 05). A proposição diz que, o retângulo contido pelos segmentos AC e CB, e o quadrado sobre o segmento CD juntos, tem a mesma área que o quadrado sobre o segmento DB. Então, o resultado da proposição nos diz que:

$$\mathbf{A}(AEIC) + \mathbf{A}(FGHI) = \mathbf{A}(DGKB)$$

[9]Se referindo ao quadrilátero $HDFG$ apenas pela sua diagonal.
[10]Se referindo aos quadriláteros $AHGC$ e $GFEK$ respectivamente.

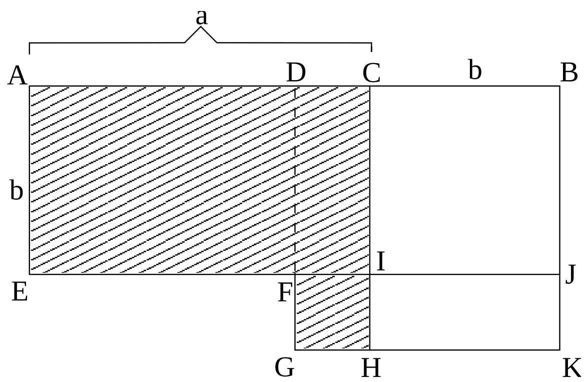

Fig. 05 - Representação geométrica da Proposição 5 - Livro II

Analisando sob o ponto de vista da geometria moderna, podemos escrever cada área descrita anteriormente, como a área correspondente ao retângulo em função de seus lados, e de mesma maneira para a área dos quadrados, sendo assim:

$$(AC \times AE) + (FI \times FG) = (DB \times DG)$$

Agora, tomando a medida associada a cada segmento, teremos que $AC = a$ e $CB = AE = b$. Da mesma maneira, veremos que $FI = FG = \left(\dfrac{a+b}{2} - b\right)$, supondo $a > b$. E finalmente, o segmento $DB = DG = \dfrac{a+b}{2}$. Desta forma, a proposição em questão é o equivalente geométrico da identidade algébrica,

$$ab + \left(\frac{a+b}{2} - b\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \Rightarrow ab + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab.$$

Observamos que, considerarmos $a > b$, pois no Livro II de *OsElementos*, Euclides evita problemas que possam recair em números negativos, tanto em suas representações geométricas, quanto em suas demonstrações, ele nunca se preocupa com aqueles casos, em que quando "diminuímos"ou subtraímos um comprimento, seu resultado é negativo. Ele trabalha sempre com comprimentos que possam ser trabalhados sem ter este problema.

Agora, podemos interpretar o enunciado da proposição de outro modo, e escrever $a = \alpha + \beta$ e $b = \alpha - \beta$, revelando que na verdade esta proposição trata-se de uma representação da conhecida identidade, $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$.

Proposição 2.6 *(Prop. 6 - Livro II) Se uma reta é bissectada e uma outra é acrescentada a ela em linha reta, o retângulo contido pelo todo (com a reta que foi acrescentada) e pela reta acrescentada junto com o quadrado sobre a metade, é igual ao quadrado sobre a reta formada com a metade e a reta acrescentada.*

O enunciado fala de um segmento de reta AD, primeiro o dividimos em duas partes iguais em C e depois acrescentamos na mesma reta que contém o segmento AD, outro segmento DB (Fig. 06). Segundo a proposição, o retângulo contido pelos segmentos AB e DB, junto com o quadrado sobre o segmento CD, é igual a área do quadrado sobre o segmento CB. Então, o resultado da proposição nos diz que:

$$\mathbf{A}(AKMB) + \mathbf{A}(LEGN) = \mathbf{A}(CEFB)$$

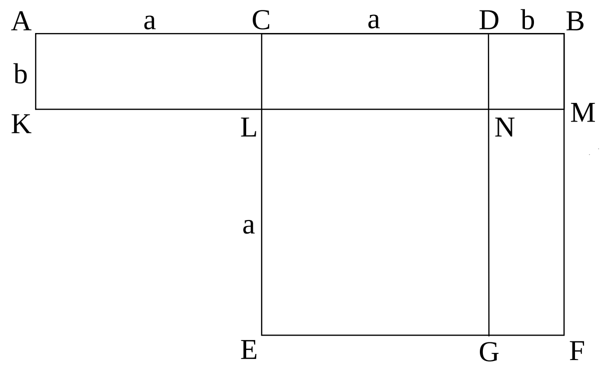

Fig. 06 - Representação geométrica da Proposição 6 - Livro II

Analisando sob o ponto de vista da geometria moderna, podemos escrever cada área descrita anteriormente, como a área correspondente ao retângulo em função de seus lados, e de mesma maneira para a área dos quadrados, sendo assim:

$$(AB \times AK) + (LN \times LE) = (CB \times CE)$$

Agora, tomando a medida associada a cada segmento, teremos que $AB = 2a + b$, $DB = AK = b$, $CD = LN = LE = a$ e $CB = CE = a + b$, supondo $a > b$. Desta forma, a proposição em questão é o equivalente geométrico da identidade algébrica,

$$(2a + b)b + a^2 = (a + b)^2.$$

No entanto, podemos interpretar o enunciado de outro modo e escrever $a = \alpha$ e $b = \beta - \alpha$, revelando que na verdade esta proposição trata-se de uma representação da conhecida identidade, $(\alpha + \beta)(\beta - \alpha) = \beta^2 - \alpha^2$.

Proposição 2.7 *(Prop. 7 - Livro II) Se uma reta é dividida em duas partes quaisquer, o quadrado contido pela reta toda, junto com o quadrado sobre uma parte da reta, é igual a duas vezes o retângulo contido pela reta toda e por uma das partes da reta, junto com o quadrado contido pela outra parte restante da reta.*

Simplificando o enunciado, temos que um dado segmento de reta AB é divido em duas partes quaisquer em C (Fig. 07). Segundo a proposição, o quadrado sobre o segmento AB, junto o quadrado sobre o segmento CB, é igual a duas vezes a área do retângulo sobre os segmentos AB e CB, junto quadrado sobre o segmento AC. Então, o resultado da proposição nos diz que:

$$\mathbf{A}(ADEB) + \mathbf{A}(CGKB) = \mathbf{A}(AHKB) + \mathbf{A}(CFEB) + \mathbf{A}(HDFG)$$

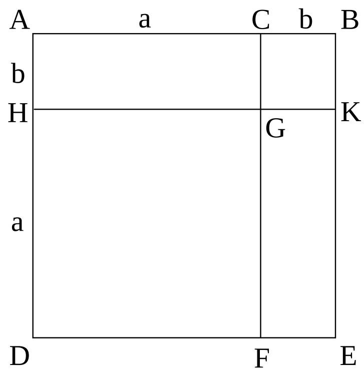

Fig. 07 - Representação geométrica da Proposição 7 - Livro II

Analisando sob o ponto de vista da geometria moderna, podemos escrever cada área descrita anteriormente, como a área correspondente aos retângulos em função de seus lados, e de mesma maneira para a área dos quadrados, sendo assim:

$$(AB \times AD) + (CB \times CG) = (AB \times AH) + (CB \times CF) + (HG \times HD)$$

Agora, tomando a medida associada a cada segmento, teremos que $AB = AD = CF = a + b$, $CB = CG = AH = b$ e $AC = HG = HD = a$, supondo $a > b$. Desta forma, a proposição em questão é o equivalente geométrico da identidade algébrica,

$$(a + b)^2 + a^2 = 2(a + b)a + b^2.$$

No entanto, podemos interpretar o enunciado de outro modo e escrever $a = \beta$ e $b = \alpha - \beta$, revelando que na verdade esta proposição trata-se de uma representação da conhecida identidade, $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2$.

Proposição 2.8 *(Prop. 8 - Livro II) Se uma reta é dividida em duas partes quaisquer, quatro vezes o retângulo contido pela reta toda e por uma das partes da reta, junto com o quadrado contido pela reta restante, é igual ao quadrado contido pela reta toda acrescentada de uma das partes.*

O enunciado nos fala de um segmento de reta AB que é divido em duas partes quaisquer em C. Segundo a proposição, quatro vezes a área do retângulo sobre os segmentos AB e CB, junto o quadrado sobre o segmento AC, é igual a área do quadrado sobre o segmento AB acrescentado do segmento CB.

Como podemos observar na figura a seguir (Fig. 08), dado um segmento AB, que foi dividido em C, acrescentamos o segmento BD, em que $BD = CB$. Construímos o quadrado $AEFD$ sobre o segmento AD. Traçamos os segmentos CH e BL, paralelos ao lado AE ou DF. De maneira similar, traçamos os segmentos MN e OP, paralelos a AD ou EF, de modo que AM e MO sejam iguais a CB.

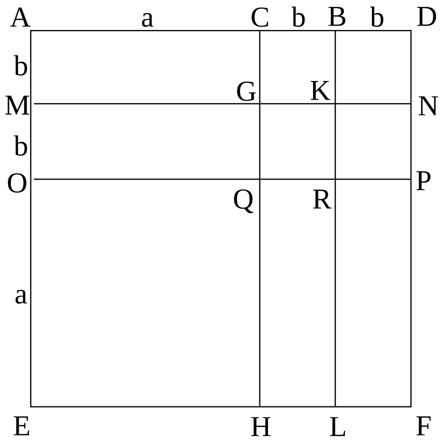

Fig. 08 - Representação geométrica da Proposição 8 - Livro II

Por construção, podemos observar que as áreas dos retângulos $AMGC$, $MOQG$, $QHLR$ e $RLFP$, são iguais. Assim como, as áreas dos quadrados $CGKB$, $BKND$, $GQRK$ e $KRPN$ são iguais. Desta forma, segundo o enunciado da proposição, a área do retângulo sobre o segmento AB e CB, equivale a área do retângulo sobre o segmento AB e AM, que é a soma das áreas do retângulo $AMGC$ com a área do quadrado $CGKB$. Portanto, as quatro áreas do retângulo sobre os segmentos AC e CB, referentes ao enunciado da proposição, são equivalentes as áreas dos quatro retângulos e quatro quadrados citados anteriormente. Afim de exemplificar melhor a explicação anterior, faremos o uso de um artifício visual (Fig. 09), baseado na Fig. 08.

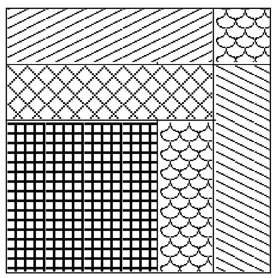

Fig. 09 - Artifício Visual

Então, o resultado da proposição nos diz que:

$$4 \times \mathbf{A}(AMKB) + \mathbf{A}(OEHQ) = \mathbf{A}(AEFD)$$

Analisando sob o ponto de vista da geometria moderna, podemos escrever as áreas descritas anteriormente, como a área correspondente ao retângulo em função de seus lados, e de mesma maneira para a área do quadrado, sendo assim:

$$4 \times (AB \times AM) + (OQ \times OE) = (AD \times AE)$$

Agora, tomando a medida associada a cada segmento, teremos que $AB = a + b$, $AM = b$, $OQ = OE = a$ e $AD = AE = a + 2b$, supondo $a > b$. Desta forma, a proposição em questão é o equivalente geométrico da identidade algébrica,

$$4(a + b)b + a^2 = (a + 2b)^2.$$

No entanto, podemos interpretar o enunciado de outro modo e escrever $a = \alpha - \beta$ e $b = \beta$, revelando que na verdade esta proposição trata-se de uma representação da identidade,

$$(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = 4\alpha\beta.$$

Proposição 2.9 *(Prop. 9 - Livro II) Se uma reta é cortada em partes iguais e desiguais, os quadrados contidos pelas partes desiguais, são iguais ao dobro do quadrado sobre a metade da reta toda, junto com o quadrado contido pela reta entre os pontos da seção.*

Simplificando o enunciado da proposição, temos que dado um segmento de reta AB, primeiro o dividimos em duas partes iguais em C e depois o dividimos em duas partes desiguais em D. O enunciado nos diz que, a soma das áreas dos quadrados, sobre os segmentos AD e DB, são iguais ao dobro da área do quadrado sobre o segmento AC, junto com a área do quadrado sobre o segmento CD.

Como podemos observar na figura a seguir (Fig. 10), um segmento AB que foi dividido em duas partes iguais em C, e dividido em duas partes desiguais em D. Construímos o quadrado $DGHB$ sobre o segmento DB, e o quadrado $AFED$ sobre o segmento AD. Traçamos os segmentos KJ e OL, paralelos a AD ou FE, de modo que AK e KO sejam iguais a CD. De maneira similar, traçamos os segmentos CM e PQ, paralelos ao lado AF ou DE, sendo que $QM = CD$.

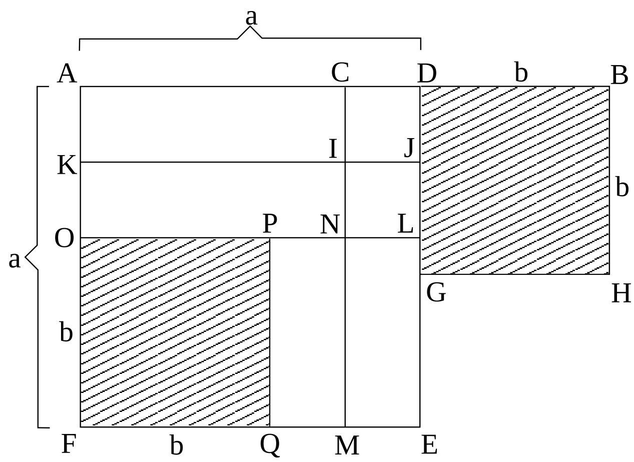

Fig. 10 - Representação geométrica da Proposição 9 - Livro II

Por construção, podemos observar que as áreas dos retângulos $AKIC$ e $KONI$, são iguais. Assim como, as áreas dos retângulos $PQMN$ e $NMEL$ também são iguais. E o mesmo pode ser verificado, para os quadrados $CIJD$ e $INLJ$. Outro fato a ser observado, é que o segmento $AF = AD$, pois AF é o lado do quadrado construído sobre AD. Mas, $AD = \left(\dfrac{AB}{2} + CD\right)$ e como por construção $AF = AK + KO + OF$, e sabemos que AK e KO são iguais a CD, podemos concluir que $OF = \left(\dfrac{AB}{2} - CD\right)$. Portanto, podemos verificar que os segmentos OP, OF, DB e DG são iguais. Logo, a área dos quadrados $OFQP$ e $DGHB$ são iguais.

Então, o resultado da proposição nos diz que:

$$\mathbf{A}(AFED) + \mathbf{A}(DGHB) = 2 \times \left[\mathbf{A}(KFMI) + \mathbf{A}(CIJD)\right]$$

O quadrado $KFMI$ foi usado no lugar do quadrado sobre o lado AC, porque ambos são equivalentes, já que AC, KI e KF são iguais. Portanto, como podemos observar na figura, o quadrado $KFMI$ é composto pelos retângulos $KONI$ e $PQMN$, e pelo quadrado $OFQP$. Podemos concluir então, que o dobro da área do quadrado $KFMI$, corresponde a soma das áreas dos retângulos $AKIC$, $KONI$, $PQMN$ e $NMEL$, mais a soma das áreas dos quadrados $CIJD$, $INLJ$, $OFQP$ e $DGHB$.

Analisando agora, sob o ponto de vista da geometria moderna, podemos escrever as áreas descritas anteriormente, como as áreas correspondentes aos quadrados em função de seus lados:

$$(AD \times AF) + (DB \times DG) = 2 \times [(KI \times KF) + (CD \times CI)]$$

Agora, tomando a medida associada a cada segmento, teremos que $AD = AF = a$, $DB = DG = b$, $KI = KF = AC = \left(\dfrac{a+b}{2}\right)$ e $CD = CI = \left(\dfrac{a+b}{2} - b\right)$, supondo $a > b$. Desta forma, a proposição em questão é o equivalente geométrico da identidade algébrica,

$$a^2 + b^2 = 2\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2} - b\right)^2\right].$$

No entanto, podemos interpretar o enunciado de outro modo e escrever $a = \alpha + \beta$ e $b = \alpha - \beta$, revelando que na verdade esta proposição trata-se de uma representação da identidade,

$$(\alpha + \beta)^2 + (\alpha - \beta)^2 = 2(\alpha^2 + \beta^2).$$

Proposição 2.10 *(Prop. 10 - Livro II) Se uma reta é bissectada e uma outra é acrescentado a ela em linha reta, o quadrado contido pela reta toda (com a reta que foi acrescentada), junto com o quadrado contido pela reta adicionada, são iguais ao dobro do quadrado contido pela metade da reta bissectada, junto com o quadrado contido pela reta correspondente a uma metade da reta bissectada acrescentada da outra reta.*

Simplificando o enunciado da proposição, temos que dado um segmento de reta AB, primeiro o dividimos em duas partes iguais em C e depois acrescentamos na mesma reta que contém o segmento AB, outro segmento BD. O enunciado nos diz que, a soma das áreas dos quadrados, sobre os segmentos AD e BD, são iguais ao dobro da área do quadrado sobre o segmento AC, junto com a área do quadrado sobre o segmento CD.

Como podemos observar na figura a seguir (Fig. 11), um segmento AB que foi dividido em duas partes iguais em C, e acrescentado de um segmento BD. Construímos o quadrado $AFED$ sobre o segmento AD. Traçamos os segmentos LG e MP, paralelos a AD ou FE, de modo que AL seja igual a BD, e LM seja igual a AC. De maneira similar, traçamos os segmentos CO e BH, sendo que BH seja igual a BD.

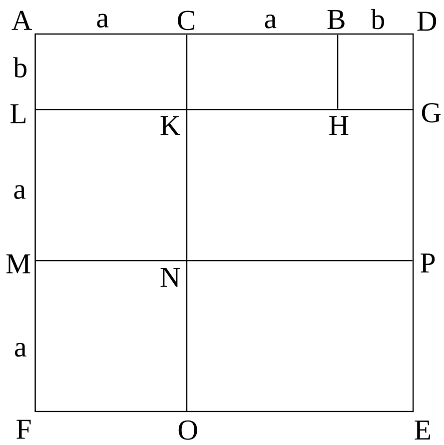

Fig. 11 - Representação geométrica da Proposição 10 - Livro II

Por construção, podemos observar que as áreas dos retângulos $ALKC$ e $CKHB$, são iguais. Assim como, as áreas dos retângulos $KNPG$ e $NOEP$ também são iguais. Outro fato a ser observado, é que o segmento $AF = AD$, pois AF é o lado do quadrado construído sobre AD. Mas, $AD = AB+BD$ e como por construção $AF = AL+LM+MF$, e sabemos que LM é igual a AC, sendo que $AC = \dfrac{AB}{2}$, portanto podemos concluir que $MF = \dfrac{AB}{2}$. Desta forma, os segmentos LK, LM, MN e MF são iguais a AC, e os quadrados $LMNK$ e $MFON$ são iguais.

Então, o resultado da proposição nos diz que:

$$\mathbf{A}(AFED) + \mathbf{A}(BHGD) = 2 \times \left[\mathbf{A}(LKMN) + \mathbf{A}(CNPD)\right]$$

O quadrado $LKMN$ foi usado no lugar do quadrado sobre o lado AC, porque ambos são equivalentes, já que AC, LK e LM são iguais. E como podemos observar na figura, o quadrado $CNPD$ é composto pelos retângulos $CKHB$ e $KNPG$, e pelo quadrado $BHGD$. Podemos concluir então, que a área do quadrado $AFED$, corresponde a soma das áreas dos quadrados $LMNK$ e $MFON$, mais a área do quadrado $BHGD$, acrescentada ainda das áreas dos retângulos $ALKC$, $CKHB$, $KNPG$ e $NOEP$.

Analisando agora, sob o ponto de vista da geometria moderna, podemos escrever as áreas descritas anteriormente, como as áreas correspondentes aos quadrados em função de seus lados:

$$(AD \times AF) + (BD \times BH) = 2 \times [(LK \times LM) + (CD \times CN)]$$

Agora, tomando a medida associada a cada segmento, teremos que $AD = AF = 2a+b$, $BD = BH = b$, $LK = LM = AC = a$ e $CD = CN = a+b$, supondo $a > b$. Desta forma, a proposição em questão é o equivalente geométrico da identidade algébrica,

$$(2a+b)^2 + b^2 = 2\big[a^2 + (a+b)^2\big].$$

No entanto, podemos interpretar o enunciado de outro modo e escrever $a = \alpha$ e $b = \beta - \alpha$, revelando que na verdade esta proposição trata-se de uma representação da identidade,

$$(\alpha+\beta)^2 + (\beta-\alpha)^2 = 2(\alpha^2+\beta^2).$$

2.2 Resolução Geométrica de Equações Quadráticas

Nesta seção, iremos analisar algumas construções geométricas encontradas no Livro II de *Os Elementos*, que tratam da resolução de equações quadráticas. Para analisar a validade das construções, faremos o uso de conceitos de geometria moderna.

A primeira equação que apresentaremos, seguida da construção geométrica que fornece as suas soluções, é a equação quadrática $x^2 + ax - a^2 = 0$. Esta equação, surge na proposição 11 do Livro II, cujo problema é dividir um segmento AB, de modo que o retângulo sobre o segmento todo e uma das partes, possua a mesma área que o quadrado construído sobre a outra parte do segmento (Fig. 12). Ou seja, achar H de modo que $a(a-x) = x^2$. Em outras palavras, achar a raiz positiva x (ou AH) da equação quadrática $x^2 + ax = a^2$.

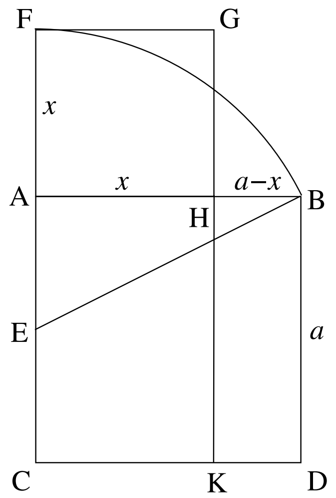

Fig. 12 - Construção da solução da equação quadrática $x^2 + ax = a^2$

Na figura, construímos o quadrado $ABDC$ sobre o segmento $AB = a$. Dividimos AC ao meio em E. Traçamos EB e estendemos CA, com centro em E e raio EB traçamos o arco encontrando o ponto F, desta forma $EF = EB$. Construímos o quadrado $FGHA$. Então, afirmamos que H é o ponto procurado (de maneira que $x = AH$ é a raiz positiva de $x^2 + ax - a^2 = 0$):

Sabemos que $AB = a$ e $EA = \dfrac{a}{2}$, pelo Teorema de Pitágoras no $\triangle AEB$:

$$AB^2 + AE^2 = EB^2 \;\Rightarrow\; EB^2 = \frac{5a^2}{4} \;\Rightarrow\; EB = a\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$EB = EF = EA + AF \;\Rightarrow\; AF = AH = \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{2}$$

Sabemos que a equação quadrática citada anteriormente, possui uma solução negativa. No entanto, Euclides cita apenas a solução positiva em *Os Elementos*, devido ao fato de que para ele não existiam os números negativos, sendo assim a outra solução era considerada “falsa”. Sabemos que AF é raiz da equação porque é igual a AH, sendo assim a solução “falsa”ou negativa é dada pelo segmento $CF = \dfrac{a\sqrt{5}}{2} + \dfrac{a}{2}$.

Além disso, não vamos nos esquecer do problema inicial que impulsionou a resolução da equação quadrática em questão, para Euclides o problema consistia em encontrar um ponto H de modo que as áreas do retângulo $HBDK$ e do quadrado $FGHA$ fossem iguais, mas na verdade o problema recaía em uma equação quadrática. Analisando o pensamento grego, pela visão de Euclides, podemos perceber que as soluções são dadas por segmentos, que possibilitam a construção dos quadriláteros desejados. É provável que Euclides não estava pensando na solução de equações quadráticas, mas sim na solução de um problemas envolvendo áreas. Porém, hoje sabemos que estas construções nos possibilitam encontrar as soluções para equações quadráticas.

Além disso, esta construção nos permite construir o "número de ouro", basta tomarmos $AB = a = 1$ e assim obter $AH = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, ou seja, a conhecida razão áurea.

A próxima equação quadrática, surgiu na proposição 5 do Livro II, que já foi vista na seção anterior. A construção fornece a solução da equação $x^2 - ax + b^2 = 0$, sendo que na verdade o problema inicial que justifica a resolução desta equação, é o problema de encontrar o ponto D, que divide um segmento AB em duas partes desiguais, de modo que satisfaça a proposição em questão. Como esta proposição já foi vista, vamos nos concentrar na solução da equação quadrática.

Dado um segmento $AB = a$, o dividimos ao meio em C e traçamos $OC = b$ perpendicular a AB por C (Fig. 13). Prolongamos o segmento OC e marcamos o segmento ON, de modo que $ON = CB = \dfrac{a}{2}$. Com centro em O e raio ON, encontramos em AB os pontos D e E. Assim, a raiz positiva da equação será o segmento DB.

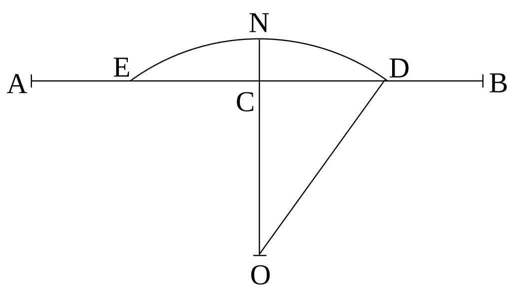

Fig. 13 - Construção da solução da equação quadrática $x^2 + b^2 = ax$

Sabemos que $OC = b$ e $OD = ON = \dfrac{a}{2}$, pelo Teorema de Pitágoras no $\triangle CQB$:

$$CD^2 + OC^2 = OD^2 \Rightarrow CD^2 = OD^2 - OC^2$$

$$CD^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2 \Rightarrow CD = \frac{\sqrt{a^2 - 4b^2}}{2}$$

$$DB = CB - CD = \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{a^2 - 4b^2}}{2}$$

Como já foi comentado anteriormente, Euclides desprezava a raiz "falsa" da equação por esta ser negativa. Neste caso, a raiz negativa é determinada pelo segmento EB, em que $CD = EC$ e portanto podemos concluir que $EB = EC + CB = \dfrac{a}{2} + \dfrac{\sqrt{a^2 - 4b^2}}{2}$.

A equação seguinte, surgiu na proposição 6 do Livro II, que também já foi vista na seção anterior. A construção fornece a solução da equação $x^2 + ax - b^2 = 0$, sendo que na verdade o problema inicial que justifica a resolução desta equação, é o problema de encontrar o ponto D, de modo que satisfaça a proposição em questão. Como esta proposição já foi vista, vamos nos concentrar na solução da equação quadrática.

Dado um segmento $AB = a$, o dividimos ao meio em C e traçamos $BQ = b$ perpendicular a AB por B (Fig. 14). Sobre o prolongamento do segmento AB, e com centro em C e raio CQ, encontramos o ponto D. Assim, a raiz positiva da equação é determinada pelo segmento BD.

Sabemos que $BQ = b$ e $CB = \dfrac{a}{2}$, pelo Teorema de Pitágoras no $\triangle COD$:

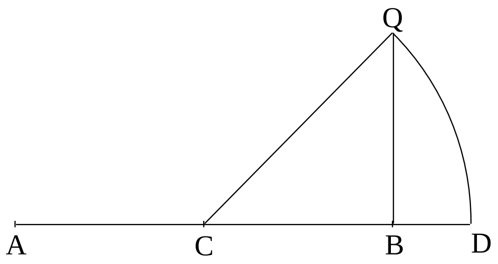

Fig. 14 - Construção da solução da equação quadrática $x^2 + ax = b^2$

$$CQ^2 = CB^2 + BQ^2 \Rightarrow CQ^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2$$

Portanto, $CQ = \dfrac{\sqrt{a^2 + 4b^2}}{2}$.

$$CD = CB + BD \Rightarrow BD = CD - CB$$

Logo, $BD = \dfrac{\sqrt{a^2 + 4b^2}}{2} - \dfrac{a}{2}$.

Neste caso, podemos verificar que a raiz "falsa"ou negativa, descartada por Euclides, corresponde ao segmento $CD = \dfrac{\sqrt{a^2 + 4b^2}}{2} + \dfrac{a}{2}$.

Como já foi comentado na primeira construção, os problemas de Euclides que levam a resoluções de equações quadráticas, eram na verdade problemas sobre áreas de quadriláteros. Além disso, vimos neste capítulo, que os gregos usavam segmentos para representar números, e que todas as operações algébricas eram geométricas.

Continuaremos o trabalho, desenvolvendo o estudo sobre a evolução da visão das operações algébricas, que começaram a ter uma representação simbólica. Além de estudar, a forma como outros povos trabalharam com a Álgebra Geométrica grega, como veremos no próximo capítulo.

Capítulo 3

A Matemática Árabe

Neste capítulo, veremos uma outra concepção de álgebra geométrica que se desenvolveu no período árabe. Mostraremos o trabalho que al-Khowarizmi desenvolveu com a Álgebra geométrica, que com ele adquiriu uma nova visão com relação a forma como eram tratados os conceitos da Álgebra Geométrica grega. Além disso, sabemos que do trabalho sobre álgebra de al-Khowarizmi, mais conhecido como *Al-jabr*, deu origem à palavra "álgebra". Num segundo momento, veremos o trabalho que Omar Khayyam desenvolveu com equações cúbicas, trabalho este que representou um ponto crucial para a evolução da Álgebra Geométrica. Inicialmente daremos um panorama do contexto histórico, investigado os motivos que levaram o conhecimento dos gregos aos árabes, bem como o desenvolvimento desse estudo pelos mesmos.

Na década que se seguiu à fuga de Maomé de Meca para Medina em 622 d.C., deu-se o início da era maometana que exerceria forte influência sobre o desenvolvimento da matemática. Dez anos se passaram e Maomé estabeleceu um estado com centro em Meca, onde judeus e cristãos recebiam proteção e liberdade de culto. Em 632 d.C., enquanto planejava atacar o império Bizantino, Maomé morreu em Medina. Mas sua morte súbita, não impediu a expansão do domínio islâmico, seus seguidores invadiram rapidamente os territórios vizinhos. Dentro de poucos anos Damasco, Jerusalém e grande parte do vale mesopotâmico cederam perante os conquistadores, e em 641 d.C. a universidade de Alexandria, que por muitos anos fora o centro matemático do mundo, foi capturada. Sabe-se que após as invasões, acorreram terríveis depredações à biblioteca de Alexandria, onde se perderam muitos volumes preciosos, que tiveram como triste destino, a sua destruição nas fogueiras.

Por mais de um século os conquistadores árabes lutaram entre si e com seus inimigos. Durante este período houvera confusão política e cultural, os árabes no início não tinham interesses intelectuais, e tinham pouca cultura, e impunham sua língua aos povos que venciam. No entanto, por volta de 750 d.C., os vencedores se mostravam ansiosos por absorver a cultura das civilizações que tinham sobrepujado. Foi de importância fundamental para a conservação da grande parte da cultura mundial a maneira como os árabes se apoderaram do saber grego e hindu. Os califas de Bagdá foram governantes esclarecidos e muitos deles se tornaram patronos da cultura e convidaram intelectuais para se instalarem juntos às suas cortes. Inúmeros trabalhos de astronomia, medicina e matemática gregos foram traduzidos para o árabe e assim preservados até que posteriormente intelectuais europeus tivessem condições de traduzi-los para o latim ou outras línguas.

Muitos intelectuais escreveram sobre matemática e astronomia, sendo o mais famoso de todos Mohammed ibn Musa al-Khowarizmi, cujo nome, como o de Euclides iria tornar-se familiar na Europa Ocidental. Deve-se a ele um tratado de álgebra e um livro sobre os numerais hindus, que foram traduzidos para o latim no século XII. Outro erudito de uma época um pouco posterior, famoso como médico, filósofo, lingüista e matemático, foi Tabit ibn Qorra (826 d.C. - 901 d.C.). Entre seus trabalhos, consta a primeira tradução árabe realmente satisfatória dos *Elementos*, além disso tem-se que suas outras traduções de Apolônio, Arquimedes, Ptolomeu e Teodósio estão entre as melhores que já se fizeram. De importância especial são suas traduções dos livros V, VI e VII das *Secções Cônicas* de Apolônio, pois somente através delas esses livros se preservaram.

Muitos árabes deram contribuições significativas à matemática, os poucos que foram citados anteriormente, mereceram tal citação devido à sua importância neste trabalho, mas sem dúvida a matemática tem muito a dever aos vários pensadores árabes que produziram conhecimentos, desenvolveram estudos de grandes obras e conservaram o saber grego à espera que fossem descobertos e desenvolvidos posteriormente pela Europa.

Mas talvez a mais profunda e original contribuição algébrica tenha sido a resolução geométrica de uma equação cúbica feita por Omar Khayyam (cerca de 1050 - 1122).

3.1 Os Fundamentos Geométricos da *Álgebra* de al-Khowarizmi

Sabemos que al-Khowarizmi é considerado o pai da álgebra. Nenhum ramo da matemática aparece amadurecido, cada ramo possui um início ou uma inspiração. Desta forma, não podemos deixar de perguntar de onde veio a inspiração para a álgebra árabe.

Nos seis primeiros capítulos do seu livro *Al-jabr*, encontramos uma matemática composta por regras sob uma forma estritamente numérica, que nos faz lembrar a matemática Babilônia. Além disso, encontram-se traços da matemática da Índia. Porém, quando lemos o livro *Al-jabr* de al-Khowarizmi, depois de seu sexto capítulo, uma luz inteiramente nova é lançada sobre a questão:

> Já dissemos o bastante no que se refere a números, sobre os seis tipos de equações. Agora, porém, é necessário que demonstremos geométricamente a verdade dos mesmos problemas que explicamos com números.

O tom dessa passagem é obviamente grega, não babilônio ou indiano. Existem então, três diferentes teorias quanto à origem da álgebra árabe. Uma dá ênfase a influencias hindus, outra aponta a tradição babilônia e a terceira aponta inspiração grega. Na verdade, a álgebra de al-Khowarizmi pode ser tomada como uma combinação dessas três teorias.

Não há dúvidas de que sua álgebra revela inconfundíveis elementos gregos, mas as demonstrações geométricas têm pouco em comum com a matemática grega clássica. Veremos a seguir, a justificativa geométrica de al-Khowarizmi (Fig. 15), para solução da equação quadrática $x^2 + c = bx$, que é dada por:

$$x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}.$$

Inicialmente, al-Khowarizmi representa x^2 pelo quadrado $ACDB$ de lado x, e o retângulo $ABNH$ representa c. Portanto, o segmento HC representa b. Desta forma, a figura representa geométricamente a equação quadrática anterior. Agora, marcamos G ponto médio de HC, traçamos por G o segmento TG paralelo a CD ou AB. Estendemos TG até K, de modo que $GK = GA$ e completamos o retângulo $GKMH$. Escolhemos L em KM, de modo que $KL = GK$ e completamos o quadrado $KLRG$. Observando a construção da figura, podemos concluir que os retângulos $MLRH$ e $GABT$ são iguais.

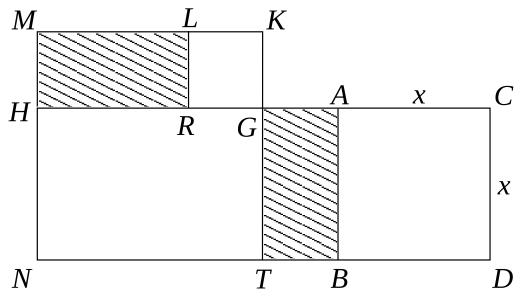

Fig. 15 - Justificativa da equação quadrática $x^2 + c = bx$

Pela figura, a área do quadrado $KMNT$ é $\left(\frac{b}{2}\right)^2$. A área deste quadrado, menos a área do quadrado $KLRG$, será igual a área do retângulo $ABNH$ (ou c), sendo que a área do quadrado $KLRG$ é igual a $\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c$. Por construção, sabemos que $KL = KG = GA$ então, segue que $x = AC = GC - GA$. Assim teremos que:

$$x = \frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}.$$

Portanto, verificamos geométricamente que a solução algébrica esta correta. E embora, os árabes também rejeitassem as raízes negativas, como faziam os gregos, eles conheciam as regras que governam o que chamamos de números com sinal.

Uma comparação entre a Fig. 15, tirada da álgebra de al-Khowarizmi, com a Fig. 06 encontrada em *Os Elementos* (Capítulo anterior), nos leva à conclusão de que a álgebra árabe tinha muito em comum com a geometria grega. No entanto, a parte aritmética da álgebra de al-Khowarizmi é evidentemente estranha ao pensamento grego. Devido ao fato, de que al-Khowarizmi quebrou a homogeneidade entre comprimentos e áreas, atribuindo ao coeficiente c da equação, uma área. Criando uma abordagem algébrica abstrata, que não havia sido vista antes. A seguir, veremos um trabalho de Omar Khayyam, que mais tarde contribuiu para que fosse fechada a separação entre a álgebra e a geometria, vendo-as como dois ramos da matemática que podiam caminhar juntos.

3.2 Resolução Geométrica de Equações Cúbicas

Omar Khayyam foi o primeiro a trabalhar com qualquer tipo de equação cúbica que admitisse uma raiz positiva. Ele acreditava que métodos aritméticos de solução nesse caso eram impossíveis, o que foi demonstrado ser possível mais tarde no século dezesseis, por isso, deu apenas soluções geométricas. É necessário ressaltar que nas antigas soluções geométricas gregas das equações cúbicas, os coeficientes eram segmentos de reta enquanto que na obra de Omar Khayyam eram números específicos.

Segundo Omar Khayyam a resolução geométrica da cúbica $x^3 + b^2x + a^3 = cx^2$, podia ser interpretada tomando os segmentos de reta com comprimentos correspondentes às grandezas a, b, c e x. Como podemos observar a seguir (Fig. 16), daremos início ao processo de construção da raiz positiva da cúbica supracitada.

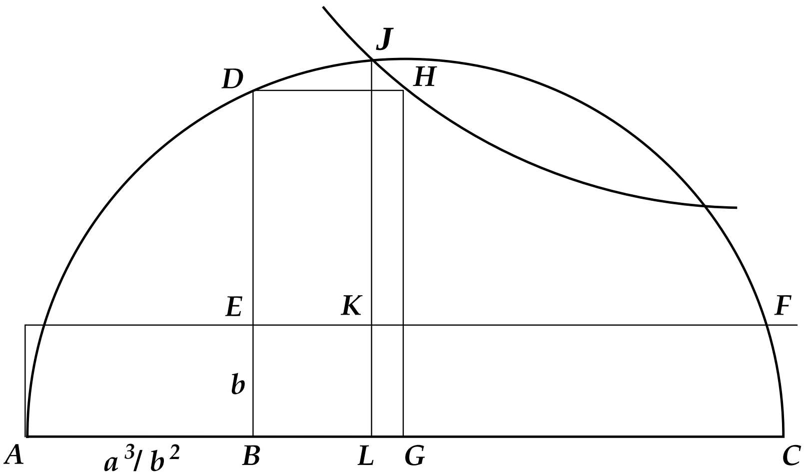

Fig. 16 - Construção geométrica da raiz positiva da equação cúbica $x^3 + b^2x + a^3 = cx^2$

Na figura construa $AB = \dfrac{a^3}{b^2}$ e $BC = c$. Trace uma semi-circunferência de diâmetro AC e suponha que a perpendicular a AC por B a corte em D. Sobre BD marque $BE = b$ e por E trace EF paralela a AC. Encontre G em BC de maneira que $(BG)(ED) = (BE)(AB)$ e complete o retângulo $DBGH$. Trace por H a hipérbole equilátera de assíntotas EF e ED e suponha que ela corte a semi-circunferência em J. Sejam K e L as intersecções da paralela a DE por J com EF e BC, respectivamente. Enfim, o segmento BL é uma raiz positiva da equação cúbica dada.

A seguir demonstraremos utilizando definições modernas, que o método geométrico de Omar Khayyam, realmente fornece a raiz positiva da cúbica em questão, e na seqüência faremos algumas considerações sobre alguns fatos importantes para a realização da construção geométrica que vimos anteriormente.

Demonstração:

Pelas propriedades da hipérbole, teremos que:

$$EK = \frac{1}{KJ} \text{ e } ED = \frac{1}{DH}, \text{ mas como } DH = BG \;\Rightarrow\; ED = \frac{1}{BG}$$

e sendo assim, $(EK)(KJ) = (ED)(BG)$. $(*)$

Então, tomando as seguintes relações de proporção teremos que:

$$\frac{BG}{AB} = \frac{BE}{ED} \;\Rightarrow\; (BG)(ED) = (AB)(BE)$$

e por $(*) \;\Rightarrow\; (EK)(KJ) = (BG)(ED) = (AB)(BE)$. (1)

Pela figura temos que, $AL = AB + BL \;\Rightarrow\; (BE)(AL) = (BE)(AB + BL)$

$$(BE)(AL) = (BE)(AB) + (BE)(BL). \text{ De (1) e por } BL = EK$$

$$(BE)(AL) = (EK)(KJ) + (BE)(EK) = EK(KJ + BE) \text{ , mas } BE = LK \text{ ,temos}$$

$$(BE)(AL) = EK(KJ + LK) = (EK)(LJ) \text{ , pois } KJ + LK = LJ.$$

Portanto, $(BE)(AL) = (EK)(LJ) = (BL)(LJ)$. (2)

Observando a figura, podemos verificar que pelo fato de LJ ser perpendicular a AC no ponto L cruzando a semi-circunferência em J, que LJ é a média geométrica de AL e LC. Logo, $LJ = \sqrt{(AL)(LC)} \;\Rightarrow\; (LJ)^2 = (AL)(LC)$. (3)

Pela relação (2) temos que:

$$\frac{BE}{BL} = \frac{LJ}{AL} \;\Rightarrow\; \frac{(BE)^2}{(BL)^2} = \frac{LJ^2}{(AL)^2} \overset{(3)}{\Rightarrow} \frac{(BE)^2}{(BL)^2} = \frac{(AL)(LC)}{AL^2}$$

$$\Rightarrow \frac{(BE)^2}{(BL)^2} = \frac{LC}{AL} \Rightarrow (BE)^2(AL) = (BL)^2(LC). \quad (4)$$

Voltando à construção da figura, sabemos que $BE = b$, $AB = \dfrac{a^3}{b^2}$ e $BC = c$, sendo assim podemos fazer as substituições em (4):

$$(BE)^2(AL) = (BL)^2(LC) \Rightarrow (BE)^2(AB + BL) = (BL)^2(BC - BL)$$

$$\Rightarrow b^2\Big(\frac{a^3}{b^2} + BL\Big) = (BL)^2(c - BL) \Rightarrow (BL)^3 + b^2(BL) + a^3 = c(BL)^2.$$

Logo, BL é uma raiz da equação cúbica dada.

$\blacksquare$

Embora, os passos da construção geométrica sejam simples de serem compreendidos, daremos algumas considerações sobre esta construção geométrica, já que temos também como objetivo, analisar os métodos e conceitos utilizados por Omar Khayyam.

Considerações:

(I) Presumimos que para construir o segmento $AB = \dfrac{a^3}{b^2}$, Omar Khayyam deve ter utilizado os conhecimentos gregos sobre as proporções (Fig. 17). Portanto, para se construir o segmento AB, deve-se achar z de tal forma que $\dfrac{a}{b} = \dfrac{z}{a}$ e depois achar AB tal que $\dfrac{a}{b} = \dfrac{AB}{z}$.

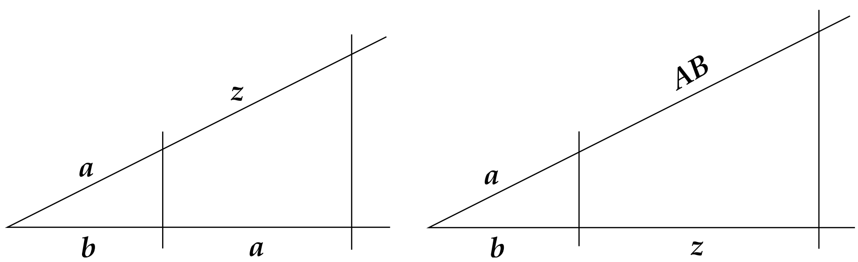

Fig. 17 - Construção geométrica do segmento $AB = \dfrac{a^3}{b^2}$

(II) Para a construção da hipérbole, iremos analisar inicialmente algumas das propriedades gerais da mesma e algumas propriedades específicas da hipérbole equilátera.

A *Hipérbole* é uma curva plana aberta de ramos infinitos, na qual é constante a diferença das distâncias de cada um de seus pontos a dois pontos fixos situados em seu plano. De acordo com a figura a seguir (Fig. 18) e por definição temos que:

$$FP - FP' = AA'$$

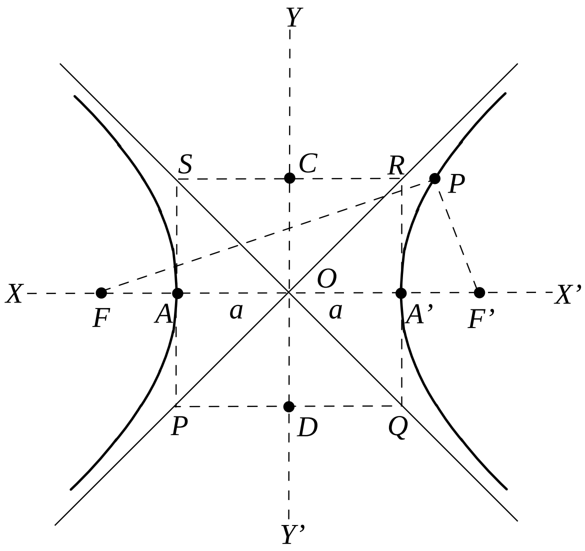

Fig. 18 - A hipérbole e seus pontos e retas característicos

Assim os pontos F e F' da figura são os *focos* da hipérbole e a distância FF' entre eles é a *distância focal*. Os pontos A e A' são os *vértices* de hipérbole e a distância AA' é representada por $2a$.

A hipérbole tem dois eixos. Um *transverso ou real* que é o segmento AA' da linha reta XX' e outro *não transverso ou imaginário* e que é o segmento CD da linha reta YY'. Estes dois eixos se cortam no centro O da curva. As *assíntotas* da hipérbole são as retas obtidas através do prolongamento das diagonais do retângulo $SPQR$.

Na *hipérbole equilátera* o comprimento do *eixo real* é igual ao comprimento do *eixo imaginário*, conseqüentemente as suas *assíntotas* são perpendiculares.

Na construção de Omar Khayyam temos que construir uma hipérbole equilátera, sendo que temos apenas um par de retas perpendiculares, que são as assíntotas, e um ponto por onde deve passar a hipérbole. Sabemos que é possível encontrar geométricamente pontos de uma hipérbole, mas como a solução do problema depende da intersecção da hipérbole com uma semi-circunferência, o simples procedimento onde encontramos pontos aleatórios da hipérbole, pode não fornecer o ponto exato da intersecção, sendo assim temos a necessidade de utilizar um método pelo qual seja possível obter o traço da hipérbole, para então encontrar o ponto exato da intersecção.

Sabemos que no caso da elipse, por exemplo, podemos fixar cada ponta de um barbante, que possua comprimento maior que a distância focal, nos focos e posicionando a ponta de um lápis no barbante esticando-o e passar todo o comprimento do barbante desta maneira, podemos desenhar uma elipse. Este procedimento garante a propriedade da elipse de manter constante a soma das distancias entre o seus pontos e os focos.

A hipérbole também possui um procedimento semelhante para se obter o seu traçado, considerando a diferença constante entre os pontos da hipérbole e os seus focos. Como podemos observar a seguir (Fig. 19), descreveremos o processo em que utilizamos uma régua, um barbante, dois alfinetes e um lápis para determinar o traçado.

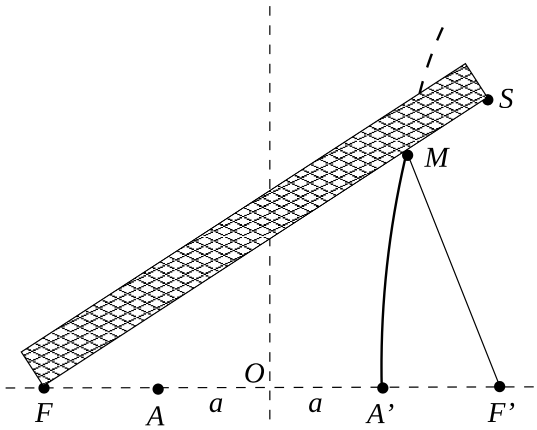

Fig. 19 - Obtendo o traço da hipébole

Para garantir o movimento necessário do lápis, cravamos dois alfinetes nos pontos F e F' e fixamos uma régua no ponto F de modo que ela possa girar no papel ao redor do alfinete. Tomemos um fio (mais curto que a régua) e fixamos uma de suas pontas no extremo da régua e outra no alfinete no ponto F'. Estiramos agora o fio, apoiando-o na régua mediante a ponta M do lápis. Então a diferença entre as distâncias MF e MF' será igual a:

$$(MF + MS) - (MF' + MS) = FS - (MF' + MS),$$

ou seja, será igual a diferença entre os comprimentos da régua e do fio. Se girarmos a régua ao redor de F, nela apoiando o lápis e mantendo o fio esticado, o lápis escreverá no papel uma curva tal que a diferença das distâncias de qualquer de seus pontos a F e F' será sempre a mesma e igual à diferença m entre os comprimentos da régua e do fio, que nada mais é do que a diferença $2a$ que corresponde a distância entre os vértices da hipérbole.

Como foi visto anteriormente, para traçar a hipérbole específica necessitamos conhecer os focos e a distância entre os vértices, para então poder determinar a diferença que a régua e o barbante devem ter. Como em nosso problema, temos somente as assíntotas e um ponto da hipérbole, temos que encontrar os focos e os vértices da mesma. Para isso, faremos o uso de algumas construções geométricas utilizando régua e compasso (Fig. 20), tentando reproduzir as construções geométricas gregas que Omar Khayyam pode ter usado em sua construção.

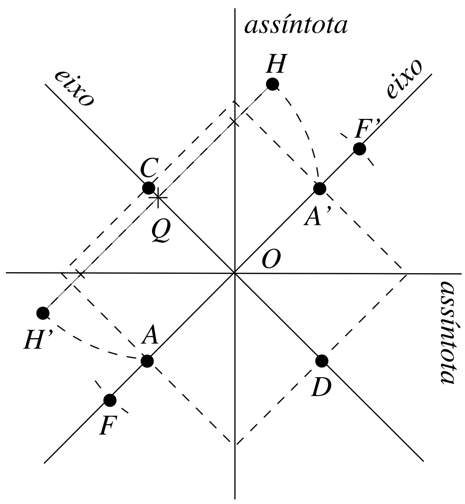

Fig. 20 - Construção geométrica dos pontos da hipérbole

Tendo as assíntotas da hipérbole, traçamos as retas que irão conter os eixos *real* e *imaginário*, pois sabemos que o ângulo formado pelas assíntotas e os eixos é de $\frac{\pi}{4}$, pelo fato da hipérbole ser equilátera. Depois, traçamos uma reta passando pelo ponto H, que corte as assíntotas e que seja perpendicular a reta que contém o eixo imaginário. Pelas propriedades da hipérbole, sabemos que a distância da intersecção da reta com a assíntota até o ponto H, será igual a distância da intersecção da reta com a outra assíntota até um determinado ponto H'. Assim, encontramos o ponto H', que também é outro ponto da hipérbole.

Agora, com centro em Q e raio QH' encontramos o ponto A que será um dos vértices da hipérbole, da mesma maneira encontramos o outro vértice A'. Pela propriedade da hipérbole equilátera, sabemos que o comprimento do eixo real e imaginário são iguais, desta forma marcamos os pontos C e D. Finalmente, as distâncias AC e $A'C$ serão iguais e correspondentes às distâncias focais OF e OF'. Tendo encontrado os focos e a distância entre o vértices da hipérbole, podemos aplicar o método para obter o traçado da mesma.

Sabemos que este método não é totalmente preciso, porque utilizamos um processo mecânico para obter o traço da hipérbole. Sabemos que a curva de uma hipérbole não pode ser traçada, através de uma construção com régua e compasso, podemos construir apenas pontos desta maneira. Mas, supomos que este foi o método empregado por Omar Khayyam, sendo que ele poderia ter tido contato com obras gregas, que dispunham de tais conhecimentos sobre construções de cônicas.

Deve-se observar também, que nas antigas soluções geométricas gregas das equações cúbicas, os coeficientes eram segmentos de retas, enquanto que na obra de Omar Khayyam eram números específicos. Os árabes, deram uma grande contribuição através da reunião e harmonização, das diferentes teses e correntes de pensamento. Os seus trabalhos colaboraram com o fechamento da separação que existia entre a álgebra e a geometria. O passo decisivo nesta direção veio muito mais tarde, com René Descartes, mas Omar Khayyam estava avançando nesta direção quando escreveu:

> "Quem quer que imagine que a álgebra é um artifício para achar quantidades desconhecidas pensou em vão. Não se deve dar atenção ao fato de a álgebra e a geometria serem diferentes na aparência. As álgebras são fatos geométricos que são provados"

No próximo capítulo, estudaremos um pouco sobre a vida e obra de René Descartes, dando ênfase ao seu trabalho *La Géométrie*, que concretizou a união da álgebra com a geometria.

Capítulo 4

René Descartes

Neste capítulo, estudaremos a vida de um dos maiores pensadores do século XVI, René Descartes. Nosso interesse pela vida de Descartes está relacionado com a sua obra mais famosa, o *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences* (Discurso sobre o método para bem conduzir a razão e buscar a verdade através da ciência). Nesta obra, em grande parte filosófica, ele apresentou três apêndices, em que ele pensou dar ilustrações de seu método filosófico geral. Um desses tratados, considerado o mais famoso, é o *La Géométrie* (Geometria), um tratado contendo estudos sobre Álgebra Geométrica como havia sido feito por al-Khowarizmi. Contudo, o trabalho de Descartes em *La Géométrie* tinha outro objetivo além de dar significados à interpretações da álgebra por meio de interpretações geométricas, ele almejava através de processos algébricos libertar a geometria de diagramas. Pelo estudo que veremos a seguir, neste capítulo, poderemos observar a mudança ocorrida com a Álgebra Geométrica que levou às raízes da atual Geometria Algébrica, foco principal deste trabalho.

René Descartes, foi filósofo e matemático, que nasceu em La Haye, na Touraine, cerca de 300 quilômetros a sudoeste de Paris, em 31 de março de 1596, e veio a falecer em Estocolmo, Suécia, a 11 de fevereiro de 1650, aos 54 anos. Ele pertenceu a uma família de posses, dedicada ao comércio, ao direito e à medicina. Aos oito anos, em 1604, Descartes foi matriculado no colégio jesuíta Real de La Flèche, em Anjou, onde estudou por quase dez anos, até 1614. Na escola, um tanto desinteressado dos estudos e muito inclinado a "meditar", tinha por desculpa sua saúde frágil que o forçava a permanecer muito tempo na cama, um hábito que manteve mesmo depois de adulto, e que só no último ano de sua vida foi obrigado a mudar, modificação que lhe foi fatal. Apesar das aulas perdidas todas as manhãs, era inteligente o bastante para acompanhar o curso e concluí-lo sem maiores dificuldades. As disciplinas eram designadas genéricamente por "filosofia", contendo física, lógica, metafísica e moral; e "filosofia aplicada", que compreendia medicina e jurisprudência. Também estudou matemática através dos manuais didáticos do monge Clavius, matemático jesuíta que algumas décadas antes havia criado o Calendário Gregoriano. Descartes disse mais tarde que, embora admirasse a disciplina e a educação recebida dos jesuítas em La Flèche, o ensino propriamente era fútil e desinteressante, sem fundamentos racionais satisfatórios, e que somente na matemática havia encontrado algum atrativo.

Decidido a deixar os estudos regulares, pois não queria a vida de um erudito e intelectual, Descartes decidiu viajar pelo mundo para observar e adquirir experiências. Antes porém, passou um curto período em Paris e, depois, para atender ao pai, ingressou num curso de Direito de dois anos na universidade de Poitier onde seu irmão também se formara. Concluído o curso em 1616, não seguiu a tradição da família. Em 1618 Descartes foi para a Holanda e se alistou na escola militar de Breda como oficial não pago do exército de Maurício de Nassau, príncipe de Orange. Estudou arte de fortificações e a língua flamenga.

O serviço militar era uma escolha conveniente da parte de Descartes, uma vez que a pratica da guerra era uma complementação da educação dos cavalheiros que não seguiam a carreira eclesiástica, além de ser, por excelência, o campo de aplicação das matemáticas, tanto no aperfeiçoamento das armas como na construção de fortalezas e edifícios em geral. É dado como improvável, que Descartes tenha participado de alguma luta real, mas a vida de campanha o aborreceu. Ele continuava a observar e fazer notas e sobretudo a sua fascinação pelas ciências matemáticas ganhou ímpeto por seu conhecimento casual seguido de amizade com o duque filosofo, doutor e físico Isaac Beeckman, um professor distinguido pelos seus conhecimentos de mecânica e matemática e reitor do Colégio Holandês em Dort. Beeckman teria ficado surpreso com a habilidade matemática do jovem oficial francês, capaz de resolver sozinho e rapidamente um complicado quebra-cabeça matemático.

A Beeckman Descartes dedicou o *Compendium musicae*, no qual indaga as relações matemáticas que determinam a ressonância, o tom e a dissonância musical, um tópico evidentemente de acordo com sua inclinação pitagórica de então. Beeckman o atualizou com respeito a vários progressos na matemática, incluindo o trabalho do matemático francês Viète, um dos pioneiros da álgebra moderna. Uma parte importante da fama de Descartes vem, justamente, de ter aplicado a formulação algébrica para problemas geométricos em lugar de grupos de desenhos geométricos e teoremas separados. O encontro com Beeckman renovou o entusiasmo de Descartes em prosseguir no caminho escolhido para seus estudos, despertando-lhe a ambição de encontrar uma fórmula geral, racional, de conhecimento universal.

Deixando o exército do príncipe de Orange após dois anos na Holanda, Descartes viajou para a Dinamarca, Polônia e Alemanha. Ele passou o inverno em Neuburg, no Danúbio Sul, onde segundo seu próprio relato, dispunha de um compartimento bem aquecido, dormia dez horas toda noite, o que muito apreciava, e se ocupava de seus próprios pensamentos. Disse que teve então alguns sonhos dos quais, de acordo com sua interpretação, significavam que ele tinha a missão de reunir todo o conhecimento humano em uma ciência universal única, toda construída de certezas racionais. Certamente ele se referia à física pois, era o sonho comum dos sábios na época encontrar uma fórmula matemática para o universo. Havia pois, na Física, a possibilidade de reduzir a fórmulas matematicamente exatas as leis fundamentais da natureza. Em Descartes era uma aspiração mais de ordem mística, embora buscasse uma solução racional, muito de acordo com seu interesse pela filosofia de Pitágoras, com fundamento em números, e pelos segredos dos Rosacruzes.

Vivendo de rendas e perseguindo a realização de seu sonho profético, viajou por vários países da Europa. Em 1623, renuncia definitivamente à carreira militar para dedicar-se à investigação científica e filosófica. Do outono de 1623 à primavera de 1625, ele vagou pela Itália onde ficou em Veneza, Roma e Florença por algum tempo, retornando depois à França, onde viveu principalmente em Paris.

A França à época de Descartes é a França de Luís XIII e do Cardeal Richelieu. A política de Richelieu gerou grande progresso para a França, atribuindo privilégios e monopólios aos negociantes e manufatureiros e ampliou o comércio marítimo. Porém a ciência oficial continuava estagnada em torno dos comentários dos antigos (particularmente de Aristóteles), isso porque tal atraso interessava indiretamente ao absolutismo monárquico. Discussões com amigos, estudos privados e reflexão eram o padrão da vida de Descartes em Paris. Realiza, com o matemático Mydorge, experiências de ótica. Fez novos amigos entre os sábios e renovou velhos conhecimentos, especialmente com o Padre Marin Mersenne, seu contemporâneo de La Flèche. Mersenne, um grande erudito, seria depois seu conselheiro e correspondente de confiança, e quem o manteria informado sobre o universo cultural europeu por muitos anos no futuro. Estava em contato com todos os intelectuais famosos da Europa e, desta forma, numa posição única para apresentar seus trabalhos a eles e relatar de volta seus comentários e críticas.

Em novembro de 1627 Descartes participa de um debate na residência do núncio papal. Após alguém expor uma nova filosofia, ele fez um aparte em sucinta argumentação, baseada em raciocínios semelhantes com os métodos de prova matemáticos. Sua tese causou viva impressão no cardeal De Bérulle, que era o líder da reação católica contra o Calvinismo. O cardeal insistiu que Descartes assumisse o dever de utilizar seus talentos ao máximo e completasse o estudo que havia alí delineado para sua audiência. Todos os presentes ficaram profundamente impressionados: o nome do jovem filósofo começou a ficar conhecido.

No outono de 1628, aos 32 anos, ele passou uns poucos meses no norte da França mas, decidiu-se pela Holanda como a terra que melhor se adaptava à realização de seus planos. Na Holanda, desde que cuidasse de sua própria vida e não se metesse com os calvinistas dominantes, encontrou uma elite que vivia pelos padrões sociais mais altos da época, um panorama político intenso e aventureiro e liberdade para escrever. Essa liberdade atraia cientistas e filósofos de toda a Europa. Encontrou-se com Beeckman em Dordrecht e depois se instalou em Franeker, no litoral da Friesland, onde fez prontamente vários amigos, particularmente Constantyn Huygens, pai do futuro cientista Christian Huygens. Lá podia gozar períodos de trabalho solitário e ainda manter contato com amigos por meio de visitas e correspondência.

Por quatro anos, de 1629 para a frente, Descartes gastou seu tempo primeiro buscando a consolidação de um método, segundo o qual, partindo da dúvida absoluta pudesse chegar à mais absoluta certeza. Depois, ateve-se ao estudo de diferentes ciências, as quais, unificadas pelo novo método, levariam a um esquema universal de conhecimento.

Descartes leva avante sua pesquisa em ciências físicas e matemáticas trocando informações com amigos, freqüentemente através de cartas, especialmente com o padre Mersenne. A pesquisa cobria muitos campos: ótica, a natureza da luz, as leis da refração e meteorologia, a natureza e estrutura dos corpos materiais, a matemática e especialmente a geometria. Fez também estudos de anatomia e de fisiologia. Era ambição de Descartes publicar um trabalho abrangente que ele intitula o "Mundo"(Le Monde, ou Traité de la Lumière), que por volta de 1633 ele tinha quase completado o rascunho quando então soube, por uma carta de Mersenne, que o astrônomo Galileu tinha sido condenado em Roma pela igreja católica por advogar o sistema de Copérnico. Beeckman lhe passou um livro de Galileu, no qual ele reconheceu muitas de suas próprias conclusões, particularmente seu apoio à teoria coperniana do movimento da terra ao redor do sol. Apesar de não estar se arriscando a nenhum perigo físico na Holanda, ele foi suficientemente prudente para não publicar seu trabalho. Nem sequer mandou o manuscrito para Mersenne. Mas continuou com uma inabalável convicção a respeito da verdade das conclusões de Galileu.

Descartes foi, no entanto, pressionado pelos seus amigos para publicar suas idéias. Escreveu um tratado de ciência expondo um método de se chegar à verdade e decidiu publicá-lo anonimamente. Nessa obra intitulada *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences* (Discurso sobre o Método para Bem Conduzir a Razão a Buscar a Verdade Através da Ciência), o novo método é exposto em termos simples e com menos ênfase à matemática, com uma introdução sobre alguns traços autobiográficos, relatando seu método e doutrina filosófica. Essa se tornou sua mais famosa obra. Os três apêndices desta obra foram *La Dioptrique*, *Les Météores*, e *La Géométrie*. O tratado foi publicado em Leyden em 1637 e Descartes escreveu para Mersenne dizendo que havia buscado no seu *La Dioptrique* e no seu *Les Météores* mostrar que o seu método era melhor que o vulgar, e no seu *La Géométrie* havia demonstrado isso. A obra descreve o que Descartes considerava um meio mais satisfatório de adquirir o conhecimento que o representado pela lógica aristotélica. Somente a matemática, Descartes sente, está certa, assim tudo deve ser baseado na matemática.

La Dioptrique é um trabalho no sistema ótico e nele trata da lei da refração. Embora Descartes não cite cientistas precedentes para as idéias que apresenta, os fatos apresentados não são novos. Entretanto sua aproximação através da observação e da experiência era uma contribuição nova muito importante. *Les Météores* é um trabalho de meteorologia e é importante por ser o primeiro trabalho que tenta colocar o estudo do tempo em bases científicas, que busca uma explicação científica sobre o tempo, e inclui uma explicação do arco-iris. Entretanto, muitas colocações científicas de Descartes estão não somente erradas como também poderiam ser evitadas se ele tivesse feito algumas experiências simples. Após a publicação do *Les Météores* as obras de Boyle, Hooke e Halley se encarregaram de contestar e corrigir suas postulações falsas. O terceiro, *La Géométrie*, talvez científica e historicamente o mais importante, introduz as famosas "coordenadas cartesianas", que teriam sido assim batizadas por G. W. Leibniz, e lança os fundamentos da moderna geometria analítica usando a notação algébrica para tratar os problemas geométricos.

A despeito da anonimidade do "Discurso", o nome do autor e suas teorias logo se tornaram conhecidos nos círculos ilustrados da Europa. Seu dito "Penso, logo existo"tornou-se prontamente popular entre os franceses. Porém, foram os ensaios científicos das três partes que atrairiam a atenção dos matemáticos e provocariam muita controvérsia. Ainda em 1637 Descartes começa a preparar o "Meditações sobre a filosofia primeira", uma versão pouco modificada do "Discurso"escrita em latim e dirigida aos filósofos e teólogos, que vai explorar o êxito da parte filosófica do Discurso. Por isso o "Meditações"constitui a principal exposição da doutrina filosófica de Descarte.

Se a publicação das "Meditações"trouxe para Descartes renome como um famoso filósofo, também o envolveu direta ou indiretamente em amargas controvérsias de conotações teológicas. Na própria Holanda, o presidente da Universidade de Utrecht (ao sul de Amsterdã) acusou-o de ateísmo e Descartes foi, de fato, condenado pelas autoridades locais em 1642 e em 1643. Descartes pediu o apoio de Huygens e, através dele e do embaixador francês, obteve a proteção do Príncipe de Orange, o que evitou conseqüências piores. Em 1644 aparece em Amsterdã o *Principia Philosophiae* (Princípios da Filosofia), um livro em grande parte dedicado à física, especialmente às leis do movimento e à teoria dos vórtices.

Na França, em 1647, Descartes se encontrou com Pascal e discutiram sobre o vácuo, cuja existência era necessária ao postulado da influência à distância. Resultou a famosa experiência de Pascal, provando que o ar exerce pressão sobre todos os objetos. Sua última visita a Paris, em 1648, permitiu-lhe rever ainda uma vez alguns de seus famosos contemporâneos, entre eles Gassendi e Hobbes, este exilado em Paris desde 1640, e, é claro, seu amigo Mersenne, que haveria de morrer em breve.

Uma cópia manuscrita do "Tratado das Paixões"foi para a Raínha Cristina da Suécia, quem, desde 1647, através do embaixador francês, tinha obtido os trabalhos de Descartes e começou a escrever para ele. Ela estava ansiosa para conhece-lo, com o plano de naturalizá-lo sueco, introduzi-lo na aristocracia sueca e dar-lhe uma propriedade em terras que havia tomado à Alemanha. Chegando em Estocolmo em outubro de 1649, Descartes foi recebido com grande cerimônia e ficou impressionado pela determinação e energia da rainha de 23 anos de idade e sua devoção aos estudos clássicos. Dispensado da maior parte do cerimonial da corte, exceto de escrever versos franceses para um ballet, sua obrigação principal era instruir a rainha em matemática e filosofia. O horário da aula era cinco horas da manhã, o que o obrigou a quebrar o hábito de se levantar diariamente por volta das 11 horas. No clima rigoroso, onde, nas palavras do filósofo, os pensamentos do homem congelam-se durante os meses de inverno, sua saúde deteriorou. Em Fevereiro de 1650, ele pegou um resfriado que se transformou em pneumonia. Dez dias depois, após receber os últimos sacramentos, faleceu.

Além de seus escritos publicados ou apenas rascunhados, Descartes deixou uma correspondência volumosa e de grande valor documental, principalmente a correspondência com Mersenne e com Antoine Arnauld. Ela cobre uma variedade de campos, desde a geometria às ciências políticas, medicina à metafísica e, principalmente, sobre os problemas da interação do corpo com o espírito, buscando aspectos mecânicos e fisiológicos que pudessem explicá-la.

4.1 *La Géométrie*

A obra de Descartes é com demasiada freqüência descrita simplesmente como aplicação da álgebra à geometria, devido ao estudo que levou à invenção da geometria analítica. Veremos posteriormente que, na verdade ela poderia ser caracterizada como sendo também a tradução das operações algébricas em linguagem geométrica. O conteúdo de *La Géométrie*, reúne estudos sobre vários conceitos matemáticos, que mudaram o forma de pensar e tratar diversos tipos de problemas tanto em álgebra, como em geometria. A *La Géométrie* está dividida em três livros:

As duas primeiras seções do Livro I de *La géométrie* tem como títulos, "Como os cálculos de aritmética se relacionam com operações de geometria" e "Como a multiplicação, a divisão e a extração de raízes quadradas são efetuadas geométricamente". Descartes mostra, como as cinco operações algébricas possuem correspondências a construções simples com régua e compasso, justificando assim a introdução de termos aritméticos em geometria. Porém, havia uma diferença importante na maneira de visão nos estudos de Descartes, ele foi mais longe que qualquer um dos predecessores na interpretação geométrica da álgebra. Ao passo que pensamos em incógnitas como números, Descartes pensava nelas como segmentos mas, não da mesma forma que já vimos com os matemáticos árabes. Num ponto essencial ele rompeu coma tradição grega e árabe, pois em vez de considerar x^2 e x^3, por exemplo, como uma área e um volume, ele também os interpretava como segmentos, e isso permitiu abandonar o princípio de homogeneidade, ao menos explicitamente, e no entanto preservar o significado geométrico. Na verdade ele foi responsável por substituir a homogeneidade formal por homogeneidade em pensamento, o que tornou sua Álgebra geométrica mais flexível, pois quando lemos xx como "x quadrado", jamais enxergamos um quadrado.

Ainda pensando em termos de Álgebra Geométrica, o livro I contém instruções detalhadas para resolver equações quadráticas, de forma geométrica à maneira dos gregos antigos. Apresentaremos a seguir, dois métodos para a solução geométrica de duas equações quadráticas, que foram apresentados por René Descartes.

Para resolver a primeira equação $x^2 = ax + b^2$, Descartes procede do seguinte modo. Tracemos um segmento LM de comprimento b e em L levanta-se um segmento NL igual a $\dfrac{a}{2}$ e perpendicular a LM (Fig. 21). Com centro em N construímos um círculo de raio $\dfrac{a}{2}$ e traçamos a reta por M e N que cortará o círculo em O e P. Então, $OM = x$ é o segmento desejado.

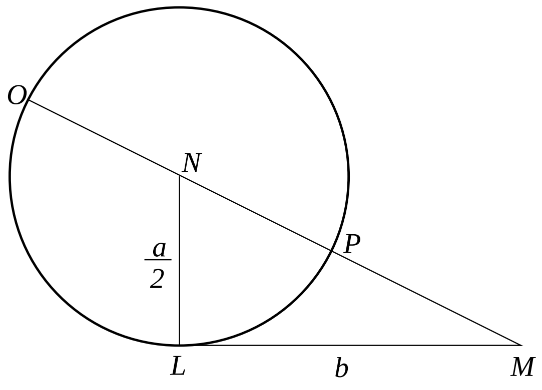

Fig. 21 - Construção da solução da equação quadrática $x^2 = ax + b^2$

Como podemos observar na figura, o segmento NM pode ser obtido aplicando o Teorema de Pitágoras no $\triangle NLM$:

$$NL^2 + LM^2 = NM^2 \Rightarrow \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2 = NM^2$$

$$NM^2 = \frac{a^2 + 4b^2}{4} \Rightarrow NM = \frac{\sqrt{a^2 + 4b^2}}{2}$$

$$OM = ON + NM \Rightarrow OM = \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2 + 4b^2}}{2}$$

Através deste processo, também era possível obter a outra raiz da equação quadrática, a raiz PM da equação, que era ignorada, pois Descartes consideravas essas raízes como sendo "falsas", ou seja, negativas. A seguir, continuaremos com a resolução geométrica da outra equação quadrática, para então prosseguir com a narrativa sobre os outros estudos feitos por Descartes, em sua obra *La Géométrie*.

Para resolver a segunda equação $x^2 = ax - b^2$, Descartes procede do seguinte modo. Tracemos um segmento AB de comprimento a e seja O o seu ponto médio (Fig. 22).

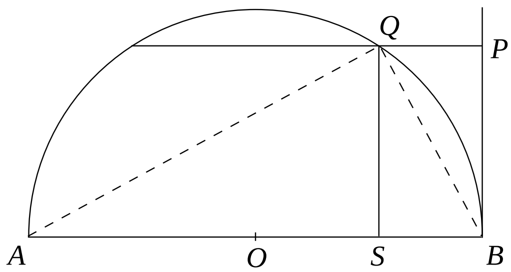

Fig. 22 - Construção da solução da equação quadrática $x^2 = ax - b^2$

Com centro em O e raio AO descrevemos uma semi-circunferência. Pelo ponto B, levantamos uma perpendicular a AB e escolha sobre ela o ponto P, de tal modo que o segmento BP tenha comprimento igual a b (Considerando $b < \frac{a}{2}$). Por P, trace uma paralela a AB. seja Q um dos pontos de intersecção coma semi-circunferência e S o pé da perpendicular baixada de Q sobre AB. Então, $SB = x$ é o segmento desejado.

Como podemos observar na figura, o segmento QS pode ser interpretado como sendo a média geométrica dos segmentos AS e SB, logo $QS^2 = (AS)(SB)$, em que $QS = b$. Pelo Teorema de Pitágoras, obtemos as seguintes relações:

$$\text{No } \triangle AQS \text{ temos que: } QS^2 + AS^2 = AQ^2 \Rightarrow b^2 + (a - SB)^2 = AQ^2 \quad (1)$$
$$\text{No } \triangle QSB \text{ temos que: } QS^2 + SB^2 = QB^2 \Rightarrow b^2 + SB^2 = QB^2 \quad (2)$$
$$\text{No } \triangle AQB \text{ temos que: } AQ^2 + QB^2 = AB^2 \Rightarrow AQ^2 + QB^2 = a^2 \quad (3)$$

Substituindo em (3), os resultados (1) e (2) teremos que:

$$[b^2 + (a - SB)^2] + (b^2 + SB^2) = a^2$$

$$b^2 + a^2 - 2a(SB) + SB^2 + b^2 + SB^2 = a^2$$

$$2b^2 - 2a(SB) + 2SB^2 = 0 \Rightarrow b^2 - a(SB) + SB^2 = 0$$

$$SB^2 = a(SB) - b^2$$

Portanto, SB é a raiz da equação quadrática $x^2 = ax - b^2$.

Depois de ter mostrado, como as operações algébricas, inclusive a resolução de equações quadráticas, são interpretadas geométricamente, Descartes se volta para a aplicação a problemas geométricos determinados. Ele aplicava a álgebra aos problemas, preocupando-se essencialmente com a equação final, que só podia conter uma quantidade desconhecida. Depois de analisar o grau dessa equação algébrica resultante ele aplicava o seu método.

O método consiste em partir de um problema geométrico, traduzi-lo em linguagem de equação algébrica, e depois, tendo simplificado ao máximo a equação, resolvê-la geométricamente, de modo semelhante ao que se usava para quadráticas.

Praticamente toda a *La géométrie* está dedicada a uma completa aplicação da álgebra à geometria e da geometria à álgebra. O principal estudo desenvolvido no Livro II, foi aquele que é considerado hoje, como o início da geometria analítica. Embora ainda não houvesse nada sistemático sobre coordenadas retangulares, pois ordenadas oblíquas eram assumidas em seus escritos. O trabalho de Descartes, se concentrou em criar um método para orientar pontos em uma região plana, e ele até sabia que as coordenadas negativas são orientadas em sentido oposto ao tomado como positivo. Descartes indicou também as condições sob as quais uma cônica é uma reta, uma parábola, uma elipse, ou uma hipérbole. Há até um enunciado de um princípio fundamental de geometria no espaço, ele diz que "Se faltam duas condições para a determinação de um ponto, o lugar do ponto é uma superfície.". No entanto, Descartes não deu qualquer exemplo de tais equações, nem amplificação dessa breve sugestão de geometria analítica em três dimensões.

Por fim, em seu Livro III, Descartes traz um curso sobre teoria elementar das equações. Ele diz como descobrir raízes racionais, se existem, como abaixar o grau da equação, ou multiplicá-las ou dividi-las por um número. Também mostra como determinar o número da possíveis raízes "verdadeiras"ou "falsas"(isto é, positivas ou negativas) pela bem conhecida "Regra de sinais de Descartes"e como achar a solução algébrica de equações cúbicas ou quárticas.

Como podemos observar, Descartes desenvolveu uma série de estudos que mostram a evolução da linguagem algébrica, trabalhando ao mesmo passo com as interpretações geométricas das mesmas. Além disso, ele introduz a idéia de aplicar álgebra a problemas geométricos, com o objetivo de facilitar a resolução deste tipo de problema. Estes estudos, delinearam assim, uma ligação entre estas duas áreas da matemática, que atualmente trabalham juntas, no que conhecemos por Geometria Algébrica.

Considerações Finais

A idéia original deste trabalho era estudar a evolução da Álgebra Geométrica grega até a atual Geometria Algébrica. Porém, enquanto desenvolvi o trabalho, pude perceber que este assunto é muito denso, pois possui uma enorme quantidade de informações. O assunto principal, que delineava esta evolução, era a mudança dos conceitos algébricos e geométricos, sob a visão das civilizações que os estudaram.

Dessa forma, me concentrei em estudar esta evolução, partindo do pensamento grego, que era governado pela geometria. Para os gregos, todas as operações era feitas com segmentos, áreas e sólidos, através de construções geométricas. Toda e qualquer operação aritmética e algébrica era realizada geométricamente, utilizando segmentos, que eram considerados por eles, como números.

Evoluímos então, até o pensamento árabe, em que já tínhamos conceitos algébricos mais desenvolvidos e passamos a resolver problemas algébricos aplicando geometria, sendo que a visão sobre os elementos geométricos mudaram, agora representávamos números através de segmentos. Aqui, a geometria não era a única forma de resolver um problema algébrico, como era para os gregos, ela era uma ferramenta que facilitava a resolução de um problema.

Com Descartes, chegamos a um nível mais elevado desta evolução, pois ele desenvolveu o método que utilizava tanto geometria quanto álgebra como ferramentas, para resolver seja um problema geométrico ou algébrico. Ele acabou com a separação entre estas duas áreas da matemática, fazendo com que trabalhassem juntas, para que resolução de vários problemas pudessem sem simplificadas ao máximo.

Referências Bibliográficas

[1] BAUMGART, Jhon K. - *Tópicos de História da Matemática para uso em Sala de Aula: Álgebra*, Editora Atual, São Paulo, 2001.

[2] BOYER, Carl B. - *História da Matemática*, Editora Edgard Blücher, 2ª Edição, São Paulo, 2001.

[3] CARVALHO, Benjamin de A. - *Desenho Geométrico*, Editora A Livro Técnico S/A., Rio de Janeiro, 1976.

[4] EVES, Howard - *Introdução à História da Matemática*, Editora da UNICAMP, São Paulo, 1995.

[5] EVES, Howard - *Tópicos de História da Matemática para uso em Sala de Aula: Geometria*, Editora Atual, São Paulo, 2001.

[6] GUNDLACH, Bernard H. - *Tópicos de História da Matemática para uso em Sala de Aula: Números e Numerais*, Editora Atual, São Paulo, 2001.

[7] HEATH, THOMAS L. - *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, vol. 1, Dover Publications Inc. , New York, 1956.

[8] HEATH, THOMAS L. - *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, vol. 2, Dover Publications Inc. , New York, 1956.

[9] HEATH, THOMAS L. - *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, vol. 3, Dover Publications Inc. , New York, 1956.

[10] MARKUCHEVITCH, A.I. - *Curvas Notáveis*, Coleção Matemática: Aprendendo e ensinando, Editora Atual, São Paulo, 1995.